

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 线性矩阵不等式	6
2.1 线性矩阵不等式的表示式	6
2.1.1 线性矩阵不等式的一般表示	6
2.1.2 可转化成线性矩阵不等式表示的问题	7
2.1.3 复线性矩阵不等式的处理	10
2.1.4 非严格线性矩阵不等式	11
2.2 一些标准的线性矩阵不等式问题	11
2.3 求解线性矩阵不等式问题的算法	14
2.3.1 椭球法	15
2.3.2 内点法	16
2.4 关于矩阵不等式的一些结论	18
2.4.1 矩阵变量的消去法	18
2.4.2 S-procedure	20
第 3 章 系统性能分析	23
3.1 连续时间系统	23
3.1.1 系统增益指标	23
3.1.2 H_2 性能	29
3.1.3 H_∞ 性能	31
3.2 离散时间系统	34
第 4 章 控制系统综合	41
4.1 H_∞ 控制	41
4.1.1 状态反馈 H_∞ 控制	42
4.1.2 输出反馈 H_∞ 控制	44
4.2 H_2 控制	59
4.3 H_2/H_∞ 控制	61
4.4 设计示例	64
第 5 章 不确定系统的分析与综合	68
5.1 不确定模型	68

5.1.1	不确定状态空间模型	68
5.1.2	不确定线性分式模型	72
5.2	鲁棒稳定性分析	75
5.2.1	二次稳定性	75
5.2.2	仿射二次稳定性	79
5.3	鲁棒性能分析	83
5.4	鲁棒 H_2/H_∞ 控制	86
5.4.1	问题的描述和准备	86
5.4.2	H_2/H_∞ 控制器设计	91
第 6 章	区域极点配置	96
6.1	LMI 区域	97
6.1.1	LMI 区域的描述	97
6.1.2	D-稳定性分析	100
6.2	具有闭环区域极点约束的状态反馈控制器设计	104
6.3	鲁棒 D-稳定性分析	107
6.3.1	无结构不确定性	109
6.3.2	结构不确定性	114
6.4	输出反馈控制器设计	119
第 7 章	保性能控制	122
7.1	连续系统的保性能控制	122
7.2	离散系统的保性能控制	127
7.3	具有闭环极点约束的保性能控制	131
7.3.1	鲁棒性能分析	132
7.3.2	二次 D-保性能控制器设计	135
第 8 章	鲁棒方差控制	141
8.1	连续系统的鲁棒方差控制	141
8.1.1	系统性能分析	141
8.1.2	状态反馈控制器设计	144
8.1.3	输出反馈控制器设计	146
8.2	离散系统的鲁棒方差控制	152
第 9 章	时滞系统的分析和综合	158
9.1	时滞系统的稳定性	158
9.1.1	时滞独立的稳定性条件	159
9.1.2	时滞依赖的稳定性条件	160
9.1.3	Lurie 时滞系统的稳定性分析	163

9.2 时滞系统的鲁棒稳定性分析	169
9.2.1 时滞独立的鲁棒稳定性条件	169
9.2.2 时滞依赖的鲁棒稳定性条件	174
9.3 不确定时滞系统的保性能控制	178
9.3.1 鲁棒性能分析	178
9.3.2 状态反馈保性能控制器设计	183
9.3.3 输出反馈保性能控制器设计	186
9.3.4 不确定离散时滞系统的保性能控制	193
9.4 时滞系统的 H_∞ 控制	199
9.4.1 时滞系统的 H_∞ 性能分析	199
9.4.2 H_∞ 控制器设计	202
9.4.3 不确定离散时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制	207
第 10 章 滤波器设计	213
10.1 H_∞ 滤波器设计	213
10.2 H_2/H_∞ 滤波器设计	219
第 11 章 大系统的分散控制	223
11.1 时滞系统的分散稳定化控制	223
11.2 离散关联系统的分散保性能控制	229
11.2.1 保性能分析	229
11.2.1 分散保性能控制器设计	234
附录 A LMI 工具箱介绍	241
A.1 线性矩阵不等式及相关术语	241
A.2 线性矩阵不等式的确定	242
A.3 信息提取	249
A.4 线性矩阵不等式求解器	250
A.5 结果验证	258
A.6 修改一个线性矩阵不等式系统	259
A.7 一些进一步的功能	261
A.8 系统模型描述	267
参考文献	270

第 1 章 引言

自 20 世纪 50 年代末现代控制理论诞生以来, 控制理论得到了飞速的发展, 并在 20 世纪 60 年代的航天领域中得到成功的应用。但是, 现代控制理论在随后的工业应用中却遇到了很大的困难。我们知道, 现代控制理论的许多结果都是基于对象的一个数学模型, 根据系统的性能要求, 通过对被控对象的数学模型进行分析来设计系统的控制律, 进而将所得到的控制律应用于被控对象来保证闭环系统具有所期望的性能。显然, 当对象模型不能精确地描述被控对象或在系统运行过程中模型和实际对象产生偏离时, 基于这样的模型设计的控制系统很难保证具有所期望的性能要求。

实际上, 对于复杂物理系统的模型, 存在以下两个问题:

1. 描述物理系统的解析模型很难, 甚至不可能精确地刻画, 因此为了便于处理, 不得不简化模型;
2. 一个模型, 无论多么详细, 都不可能是物理系统的一个精确表示。因此, 模型存在本质的不精确性。

建模中的以上两个方面称为模型的不确定性。

对于一个复杂系统, 为了得到一个较为简单的模型, 一种处理方法是将其分解成线性部分和非线性部分的组合, 进而用一个更容易处理和分析的对象来替代这个非线性部分, 达到简化原来复杂系统模型的目的。

考虑由以下非线性微分方程描述的复杂动态系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.1)$$

初始条件是 $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 是向量值函数, \mathbf{f} 和 \mathbf{h} 是光滑的向量值函数。在一个特殊的运行点附近, 可以将系统 (1.1) 分解成一个线性部分和一个非线性部分的组合。特别地, 可以在原点 $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ 处进行这样的分解。定义系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\end{aligned}\quad (1.2)$$

其中: \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 是系统 (1.1) 的一个线性化近似,

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}$$

显然, 这样定义的系统 (1.2) 和系统 (1.1) 是等价的。因此, 它们之间存在一一对应的关系。得到这样的等价系统的一种方式是将函数 \mathbf{f} 和 \mathbf{h} 在原点处线性化, 可得:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}, \quad \mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})=(\mathbf{0}, \mathbf{0})}$$

进一步可以将方程 (1.2) 写成以下等价的形式:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w_1 \quad (1.3)$$

$$y = Cx + Du + w_2 \quad (1.4)$$

$$(w_1, w_2) = (g(x, u), r(x, u)) \quad (1.5)$$

设 G 是由 (1.3) ~ (1.4) 式确定的映射: 对给定的初始条件 $x(0)$, $(w_1, w_2, u) \mapsto (x, u, y)$ 。 Q 是由 (1.5) 式确定的映射: $(x, u) \mapsto (w_1, w_2)$ 。因此, (1.3) ~ (1.5) 式描述的系统可以用图 1.1 来表示。

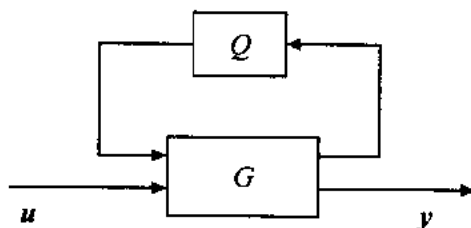


图 1.1 系统分解

容易看到, G 是系统的线性部分, Q 是静态的非线性映射。这样就将系统的非线性部分分离出来, 归入到映射 Q 中, 非线性部分和线性部分通过反馈关联联系起来。

更一般地, 我们用这样的方法不仅可以处理系统的非线性特性, 而且也可以处理系统的某些动态特性。考虑由以下方程组描述的系统:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ f_2(x_1, x_2, u) \end{bmatrix} \\ y &= h(x_1, x_2, u) \end{aligned} \quad (1.6)$$

采用前面系统分解的思想, 对系统 (1.6) 中的方程 $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$, $y = h(x_1, x_2, u)$ 进行分解, 并得到:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u + g_1(x_1, x_2, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \\ y &= C_1 x_1 + D_1 u + r(x_1, x_2, u) \end{aligned} \quad (1.7)$$

进一步, 系统 (1.7) 中的方程等价于以下的线性方程:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1 x_1 + B_1 u + w_1 \\ y &= C_1 x_1 + D_1 u + w_2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

其中:

$$\begin{aligned} (w_1, w_2) &= (g_1(x_1, x_2, u), r(x_1, x_2, u)) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) \end{aligned} \quad (1.9)$$

设 G 是由方程 (1.8) 描述的线性系统: $(w_1, w_2, u) \mapsto (x_1, u, y)$, Q 是由 (1.9) 式描述的系统: $(x_1, u) \mapsto (w_1, w_2)$ 。对这样定义的 G 和 Q , 图 1.1 也同样描述了系统 (1.6)。

注意到在这个结构中, 系统的部分动态行为和所有的非线性行为被从原来的系统中分离出来, 包含在映射 Q 中。

在上面介绍的系统分解中, 将一个复杂的非线性系统分解成一个线性部分 G 和一个非线性部分 Q 的关联。其中的 Q 不仅是非线性的, 还可能包含动态特性, 因此它往往是比较复杂的。如果能找到一种更容易处理的对象来替代映射 Q , 则这样的分解会使得整个系统的分析变得更加方便和容易, 其意义也才会显现出来。以下介绍具有这样性质的替代映射 Q 的一个映射集合 Δ 。

集合 Δ 是具有以下性质的一个映射集合: 如果对某个输入 p , $q = Q(p)$, 则存在一个映射 $\Delta \in \Delta$, 使得 $q = \Delta(p)$ 。如果集合 Δ 具有这样的性质, 则:

$$\{(p, q): q = Q(p)\} \subset \{(p, q): \text{存在 } \Delta \in \Delta, \text{ 使得 } q = \Delta(p)\}$$

显然, 上式左边的集合定义了一个函数, 而右边由 Δ 产生的输入输出对一般来说只是一种关系。这两个集合相差的程度确定了由 Δ 来替代 Q 后所产生的保守程度。

之所以引进集合 Δ 是因为一般来说集合 Δ 中的映射比映射 Q 要简单得多。例如, 当 Q 是一个非线性映射时, 可以用一组线性映射 Δ 来产生所有可能的满足 $q = Q(p)$ 的输入输出对 (p, q) 。因此, 我们可以用简单的线性映射集合 Δ 来替代这个非线性映射 Q 。

现在利用集合 Δ 来分析图 1.1 描述的系统。设 $S(G, Q)$ 表示图 1.1 中的映射: $u \mapsto y$, 如果用映射集 $S(G, \Delta) = \{S(G, \Delta): \Delta \in \Delta\}$ 来替代映射 $S(G, Q)$, 则可以看到: 如果所有映射 $S(G, \Delta)$ 所描述的系统具有一个给定的性质, 则映射 $S(G, Q)$ 所描述的系统也必定具有这样的性质。然而, 反之却未必成立。因此, 应用这样的方法来分析系统的性质具有一定的保守性。

例 1.1 考虑系统 (1.1) 的分解。为了简化, 假定 x 、 y 和 u 都是标量值函数。假设定义映射 Q 的函数 r 和 g 满足以下的不等式:

$$\begin{aligned} |w_1(t)| &\leq k_{11}|x(t)| + k_{12}|u(t)| \\ |w_2(t)| &\leq k_{21}|x(t)| + k_{22}|u(t)| \end{aligned} \quad (1.10)$$

其中: k_{ij} 是已知的正常数。则对某个给定的 $(w_1, w_2) = Q(x, u)$, 存在标量函数 $\delta_{11}(t)$ 、 $\delta_{12}(t)$ 、 $\delta_{21}(t)$ 和 $\delta_{22}(t)$, 其中的每个 $\delta_{ij}(t) \in [-k_{ij}, k_{ij}]$, 使得:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \delta_{11}x(t) + \delta_{12}u(t) \\ w_2(t) &= \delta_{21}x(t) + \delta_{22}u(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

定义集合 Δ :

$$\Delta = \left\{ \Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11}(t) & \delta_{12}(t) \\ \delta_{21}(t) & \delta_{22}(t) \end{bmatrix}; |\delta_{ij}(t)| \leq k_{ij} \right\}$$

则根据前面的分析, 对满足 $(w_1, w_2) = Q(x, u)$ 的任意输入输出, 存在 $\Delta \in \Delta$, 使得关系式 (1.11) 成立。

例 1.2 考虑系统 (1.6) 的分解, 注意到在这种情况下, Q 所表示的可能是一个动态系统。假定 x_1 和 u 是标量函数, 并且假定如果 $(w_1, w_2) = Q(x_1, u)$, 则以下的能量不等式

成立:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} |w_1(t)|^2 dt &\leq k_1 \left(\int_0^{\infty} |x_1(t)|^2 dt + \int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt \right) \\ \int_0^{\infty} |w_2(t)|^2 dt &\leq k_2 \left(\int_0^{\infty} |x_1(t)|^2 dt + \int_0^{\infty} |u(t)|^2 dt \right)\end{aligned}\quad (1.12)$$

其中: (1.12) 式右边的积分假定是有限的。定义映射集合 Δ 是所有满足不等式 (1.12) 的线性映射 $\Delta: (x_1, u) \mapsto (w_1, w_2)$ 的全体, 则对某个有界能量函数 x_1 和 u , 如果 $(w_1, w_2) = Q(x_1, u)$, 则存在一个映射 $\Delta \in \Delta$, 使得 $\Delta(x_1, u) = (w_1, w_2)$ 。因此, 集合 Δ 中的所有映射将覆盖映射 Q 所产生的输入输出对。

在系统分析中, 用映射集合 Δ 来替代映射 Q 除了以上目的以外, 还有一个目的就是: 任何一个物理系统都不可能用一个数学模型精确表示。由于对系统某些特性或环节缺乏足够的了解 (即难以建模的部分)、系统环境的变化、元器件的老化、某些物理参数的漂移或随时间的未知变化等因素所带来的系统行为的变化都有可能产生模型不确定性的产生。因此, 集合 Δ 的引进提供了一种解释不能精确模型化的那部分系统行为。

总结起来, 集合 Δ 的引进可以为以下两个相关但不同的目的服务:

- 提供一种简化模型的方法
- 用于模型和解释不确定的动态行为

对用这一类模型描述的系统的分析和综合问题称为参数不确定系统的鲁棒性能分析和综合问题, 它是近 20 年来国际自动控制界最活跃的研究领域之一, 吸引了大量研究人员对其进行深入研究, 提出了一系列诸如 H_{∞} 控制、 μ 方法等新的研究成果和方法, 开拓了许多新的研究分支, 一些研究结果在许多工业控制领域得到了成功的应用。

在时间域中研究参数不确定系统的鲁棒分析和综合问题的主要理论基础是 Lyapunov 稳定性理论, 早期的一种主要方法是 Riccati 方程处理方法。它是通过将系统的鲁棒分析和综合问题转化成一个 Riccati 型矩阵方程的可解性问题, 进而应用求解 Riccati 方程的方法给出系统具有给定鲁棒性能的条件和鲁棒控制器的设计方法。尽管 Riccati 方程处理方法可以给出控制器的结构形式, 便于进行一些理论分析, 但是在实施这一方法之前, 往往需要设计者事先确定一些待定参数, 这些参数的选择不仅影响到结论的好坏, 而且还会影响到问题的可解性。但在现有的 Riccati 方程处理方法中, 还缺乏寻找这些参数最佳值的方法, 参数的这种人为确定方法给分析和综合结果带来了很大的保守性。另一方面, Riccati 型矩阵方程本身的求解也还存在一定的问题。目前存在很多求解 Riccati 型矩阵方程的方法, 但多为迭代方法, 这些方法的收敛性并不能得到保证。

20 世纪 90 年代初, 随着求解凸优化问题的内点法的提出, 线性矩阵不等式再一次受到控制界的关注, 并被应用到系统和控制的各个领域。许多控制问题可以转化为一个线性矩阵不等式系统的可行性问题, 或者是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题。由于有了求解凸优化问题的内点法, 使得这些问题可以得到有效的解决。1995 年, MATLAB 推出了求解线性矩阵不等式问题的 LMI 工具箱, 从而使得人们能够更加方便和有效地来处理、求解线性矩阵不等式系统, 进一步推动了线性矩阵不等式方法在系统和控制领域中的应用。

线性矩阵不等式处理方法可以克服 Riccati 方程处理方法中存在的许多不足。线性矩阵不等式方法给出了问题可解的一个凸约束条件, 因此, 可以应用求解凸优化问题的有效方法来进行求解。正是这种凸约束条件, 使得在控制器设计时, 得到的不仅仅是一个满足设计要求的控制器, 而是从凸约束条件的任意一个可行解都可以得到一个控制器, 即可以得到满足设计要求的一组控制器。这一性能在求解系统的多目标控制问题时是特别有用的。

本书将结合作者的研究工作, 较为系统地介绍线性矩阵不等式的概念、求解方法、LMI 工具箱、鲁棒控制的线性矩阵不等式处理方法及一些相关的研究结果。

第2章 线性矩阵不等式

近 10 年来, 线性矩阵不等式被广泛用来解决系统与控制中的一些问题, 随着解决线性矩阵不等式的内点法的提出、MATLAB 软件中 LMI 工具箱的推出, 线性矩阵不等式这一工具越来越受到人们的注意和重视, 应用线性矩阵不等式来解决系统与控制问题已成为这些领域中的一大研究热点。

本章主要介绍线性矩阵不等式的一些基本概念、求解线性矩阵不等式的主要算法以及应用线性矩阵不等式来解决系统与控制问题时要用到的一些基本结论。

2.1 线性矩阵不等式的表示式

2.1.1 线性矩阵不等式的一般表示

一个线性矩阵不等式就是具有形式

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m < 0 \quad (2.1.1)$$

的一个表达式。其中 x_1, \dots, x_m 是 m 个实数变量, 称为线性矩阵不等式 (2.1.1) 的决策变量, $x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ 是由决策变量构成的向量, 称为决策向量, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ 是一组给定的实对称矩阵, (2.1.1) 式中的不等号 “ $<$ ” 指的是矩阵 $F(x)$ 是负定的, 即对所有非零的向量 $v \in \mathbb{R}^n$, $v^T F(x) v < 0$, 或者 $F(x)$ 的最大特征值小于零。

如果把 $F(x)$ 看成是从 \mathbb{R}^m 到实对称矩阵集 $S^n = \{M: M = M^T \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$ 的一个映射, 则可以看出 $F(x)$ 并不是一个线性函数, 而只是一个仿射函数。因此, 更确切地说, 不等式 (2.1.1) 应该称为一个仿射矩阵不等式。但由于历史原因, 目前线性矩阵不等式这一名称已被广泛接受和使用。

在许多系统与控制问题中, 问题的变量是以矩阵的形式出现的。例如 Lyapunov 矩阵不等式:

$$F(X) = A^T X + XA + Q < 0 \quad (2.1.2)$$

其中: $A, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是给定的常数矩阵, 且 Q 是对称的, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的未知矩阵变量, 因此该矩阵不等式中的变量是一个矩阵。设 E_1, E_2, \dots, E_M 是 S^n 中的一组基, 则对任意对称矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 存在 x_1, x_2, \dots, x_M , 使得 $X = \sum_{i=1}^M x_i E_i$ 。因此,

$$\begin{aligned} F(X) &= F\left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) = A^T \left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) + \left(\sum_{i=1}^M x_i E_i\right) A + Q \\ &= Q + x_1 (A^T E_1 + E_1 A) + \cdots + x_M (A^T E_M + E_M A) \\ &< 0 \end{aligned}$$

即 Lyapunov 矩阵不等式 (2.1.2) 写成了线性矩阵不等式的一般形式 (2.1.1)。

如果在 (2.1.1) 式中用 “ \leq ” 代替 “ $<$ ”，则相应的矩阵不等式称为非严格的线性矩阵不等式。对 $\mathbf{R}^m \rightarrow S^n$ 的任意仿射函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ ， $F(x) > 0$ ， $F(x) < G(x)$ 也是线性矩阵不等式，因为它们可以等价地写成 $-F(x) < 0$ ， $F(x) - G(x) < 0$ 。

所有满足线性矩阵不等式 (2.1.1) 的 x 的全体构成一个凸集，这就是以下的引理 2.1.1。

引理 2.1.1 $\Phi = \{x: F(x) < 0\}$ 是一个凸集。

证明 对任意的 $x_1, x_2 \in \Phi$ 和任意的 $\alpha \in (0, 1)$ ，由于 $F(x_1) < 0$ ， $F(x_2) < 0$ 以及 $F(x)$ 是一个仿射函数，故

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2) < 0$$

所以 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in \Phi$ ，即 Φ 是凸的。从而引理 2.1.1 得证。

引理 2.1.1 说明了线性矩阵不等式 (2.1.1) 这个约束条件定义了自变量空间中的一个凸集，因此是自变量的一个凸约束。正是线性矩阵不等式的这一性质使得可以应用解决凸优化问题的有效方法来求解相关的线性矩阵不等式问题。

2.1.2 可转化成线性矩阵不等式表示的问题

系统与控制中的许多问题初看起来不是一个线性矩阵不等式问题，或不具有 (2.1.1) 式的形式，但可以通过适当的处理将问题转换成具有 (2.1.1) 式形式的一个线性矩阵不等式问题。下面给出了这方面的一些典型例子。

1. 多个线性矩阵不等式

$$F_1(x) < 0, \cdots, F_k(x) < 0$$

称为一个线性矩阵不等式系统。引进 $F(x) = \text{diag}\{F_1(x), \cdots, F_k(x)\}$ ，则 $F_1(x) < 0, \cdots, F_k(x) < 0$ 同时成立当且仅当 $F(x) < 0$ 。因此，一个线性矩阵不等式系统也可以用个单一的线性矩阵不等式来表示。

2. 考虑问题

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ Ax = b \end{cases}$$

其中的 $F: \mathbf{R}^m \rightarrow S^n$ 是一个仿射函数， $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $b \in \mathbf{R}^n$ 是给定的常数矩阵和向量。由于 $Ax = b$ 的解向量的全体构成了 \mathbf{R}^m 中的一个线性子空间，因此可以考虑更一般的问题：

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ x \in M \end{cases} \quad (2.1.3)$$

其中的 M 是 \mathbf{R}^m 中的一个仿射集, 即

$$M = x_0 + M_0 = \{x_0 + m \mid m \in M_0\}$$

上式中的 $x_0 \in \mathbf{R}^m$, M_0 是 \mathbf{R}^m 中的一个线性子空间。以下证明这样一个多约束问题可以转化成一个单一的线性矩阵不等式约束。

设 $e_1, \dots, e_k \in \mathbf{R}^m$ 是线性空间 M_0 的一组基, 而仿射函数 $F(x)$ 可以分解成 $F(x) = F_0 + T(x)$, 其中 $T(x)$ 是一个线性函数。由于对任意的 $x \in M$, x 可以表示成 $x = x_0 + \sum_{i=1}^k x_i e_i$ 。因此, 问题 (2.1.3) 成立当且仅当

$$\begin{aligned} 0 > F(x) &= F_0 + T(x_0 + \sum_{i=1}^k x_i e_i) \\ &= F_0 + T(x_0) + \sum_{i=1}^k x_i T(e_i) \\ &= \tilde{F}_0 + x_1 \tilde{F}_1 + \dots + x_k \tilde{F}_k \\ &= \tilde{F}(\tilde{x}) \end{aligned}$$

其中: $\tilde{F}_0 = F_0 + T(x_0)$, $\tilde{F}_i = T(e_i)$, $\tilde{x} = [x_1, \dots, x_k]^T$ 。注意, \tilde{x} 的维数要小于 x 的维数。

3. 在许多将一些非线性矩阵不等式转化成线性矩阵不等式的问题中, 我们常常用到矩阵的 Schur 补性质。考虑一个矩阵 $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 并将 S 进行分块:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

其中的 S_{11} 是 $r \times r$ 维的。假定 S_{11} 是非奇异的, 则 $S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$ 称为 S_{11} 在 S 中的 Schur 补。以下引理给出了矩阵的 Schur 补性质。

引理 2.1.2 对给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 其中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的。以下三个条件是等价的:

- (i) $S < 0$;
- (ii) $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- (iii) $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ 。

证明 (i) \Leftrightarrow (ii) 由于 S 是对称的, 故有 $S_{11} = S_{11}^T$, $S_{22} = S_{22}^T$, $S_{21} = S_{12}^T$ 。应用矩阵块的初等运算, 可以得到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} - S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} \end{bmatrix}$$

因此，

$$\begin{aligned} S < 0 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21}S_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}^T < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} \end{bmatrix} < 0 \\ &\Leftrightarrow \text{(ii)} \end{aligned}$$

这就证明了结论 (i) 和结论 (ii) 是等价的。

(i) \Leftrightarrow (iii) 注意到

$$\begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -S_{12}S_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}^T & 0 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}$$

类似于前面的证明即可以得到这一部分的结论。

综合以上两部分的证明，可得引理的结论。

对线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ ，其中 $F(x) = \begin{bmatrix} F_{11}(x) & F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & F_{22}(x) \end{bmatrix}$ ， $F_{11}(x)$ 是方阵。则应用矩阵的 Schur 补性质可以得到： $F(x) < 0$ 当且仅当

$$\begin{cases} F_{11}(x) < 0 \\ F_{22}(x) - F_{12}^T(x)F_{11}^{-1}(x)F_{12}(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

或

$$\begin{cases} F_{22}(x) < 0 \\ F_{11}(x) - F_{12}(x)F_{22}^{-1}(x)F_{12}^T(x) < 0 \end{cases} \quad (2.1.5)$$

注意到 (2.1.4) 式或 (2.1.5) 式中的第二个不等式是一个非线性矩阵不等式，因此以上的等价关系也说明了应用矩阵的 Schur 补性质，一些非线性矩阵不等式可以转化成线性矩阵不等式。另一方面，这一等价关系也说明了 (2.1.4) 式或 (2.1.5) 式中的非线性矩阵不等式也定义了一个关于变量 x 的凸约束。

在一些控制问题中，经常遇到二次型矩阵不等式：

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0 \quad (2.1.6)$$

其中： $A, B, Q = Q^T > 0, R = R^T > 0$ 是给定的适当维数的常数矩阵， P 是对称矩阵变量，则应用引理 2.1.2，可以将矩阵不等式 (2.1.6) 的可行性问题转化成一个等价的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ B^T P & -R \end{bmatrix} < 0 \quad (2.1.7)$$

的可行性问题，而后者是一个关于矩阵变量 P 的线性矩阵不等式。

2.1.3 复线性矩阵不等式的处理

前面讨论的线性矩阵不等式问题和 LMI 工具箱中的线性矩阵不等式求解器只能处理实的线性矩阵不等式。为了处理复线性矩阵不等式，我们需要将它们转化成实线性矩阵不等式的形式。注意到映射

$$a + jb \mapsto \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

已经建立起了复数空间 \mathbf{C} 和实矩阵空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 之间的一个同构关系。因此，一个复矩阵 $M = A + jB$ 可以等价地用一个增维的实矩阵 $\begin{bmatrix} A & -B \\ -B & A \end{bmatrix}$ 来表示。对一些复矩阵的关系式，

只要用复矩阵的等价实矩阵表示来替代其中的复矩阵，就可以得到相应等价的实矩阵表示式。例如：两个复矩阵 $M = A + jB$ 和 $N = C + jD$ 的乘积 $P = X + jY$ 可以通过以下实矩阵之间的乘法运算得到，即

$$\begin{bmatrix} X & -Y \\ -Y & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & -D \\ -D & C \end{bmatrix}$$

埃尔米特矩阵 $P = X + jY$ 是正定的当且仅当 $\begin{bmatrix} X & -Y \\ -Y & X \end{bmatrix} > 0$ 。

例 2.1.1 求复值仿射矩阵函数 $M(x)$ 的最大奇异值。

解 这个问题可以通过求解以下的优化问题得到：

$$\begin{aligned} \min_{x, \gamma} \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -\gamma I & M^H(x) \\ M(x) & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

显然这是一个具有复线性矩阵不等式约束的优化问题。应用前面介绍的将复线性矩阵不等式转化成实线性矩阵不等式的方法，并记 $M_R = \text{Re}(M)$, $M_I = \text{Im}(M)$ ，可得等价的具有实线性矩阵不等式约束的优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{x, \gamma} \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -\gamma I & 0 & M_R^T(x) & -M_I^T(x) \\ 0 & -\gamma I & M_I^T(x) & M_R^T(x) \\ M_R(x) & M_I(x) & -\gamma I & 0 \\ -M_I(x) & M_R(x) & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

该问题可以应用 LMI 工具箱中标准的线性矩阵不等式求解器直接求解。

2.1.4 非严格线性矩阵不等式

在许多应用问题中，正如例 2.1.1，我们常常会遇到非严格的线性矩阵不等式，既包含严格线性矩阵不等式，也包含非严格线性矩阵不等式的混合线性矩阵不等式系统。对非严格线性矩阵不等式，我们有时将它当成严格的线性矩阵不等式来处理，这样的处理在大多数情况下是正确的，但并不总是正确的。

考虑在非严格线性矩阵不等式 $F(x) \leq 0$ 约束下的优化问题 $\min c^T x$ 。如果 $F(x) < 0$ 是可行的，则非严格的线性矩阵不等式 $F(x) \leq 0$ 的可行集是严格线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 的可行集的闭包。因此，

$$\inf \{c^T x : F(x) \leq 0\} = \inf \{c^T x : F(x) < 0\}$$

在这种情况下，可以用相应的严格线性矩阵不等式替代非严格的线性矩阵不等式的方法来处理非严格的线性矩阵不等式问题。

如果 $F(x) \leq 0$ 不是严格可行的，则严格和非严格的线性矩阵不等式问题是不同的。例如，

$$F(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{bmatrix} \leq 0$$

是可行的， $x=0$ 是它的一个可行解，但它不是严格可行的。

对于一般的非严格线性矩阵不等式，总可以通过消去一些隐含的等式约束，将其转化为一个等价的严格线性矩阵不等式。

2.2 一些标准的线性矩阵不等式问题

本节介绍三类标准的线性矩阵不等式问题。在 MATLAB 的 LMI 工具箱中给出了这三类问题的求解器。假定其中的 F 、 G 和 H 是对称的矩阵值仿射函数， c 是一个给定的常数向量。

1. 可行性问题 (LMIP)：对给定的线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ ，检验是否存在 x ，使得 $F(x) < 0$ 成立的问题称为一个线性矩阵不等式的可行性问题。如果存在这样的 x ，则该线性矩阵不等式问题是可行的，否则这个线性矩阵不等式就是不可行的。

2. 特征值问题 (EVP)：该问题是在一个线性矩阵不等式约束下，求矩阵 $G(x)$ 的最大特征值的最小化问题或确定问题的约束是不可行的。它的一般形式是：

$$\begin{aligned} \min \lambda \\ \text{s.t. } G(x) < \lambda I \\ H(x) < 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

这样一个问题也可以转化成以下的一个等价问题:

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ & \text{s.t. } F(x) < 0 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

这也是 LMI 工具箱中特征值问题求解器所要处理问题的标准形式。问题 (2.2.1) 和问题 (2.2.2) 的相互转化是因为: 一方面,

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ \text{s.t. } F(x) < 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} \min \lambda \\ \text{s.t. } c^T x < \lambda \\ F(x) < 0 \end{aligned}$$

另一方面, 定义 $\hat{x} = [x^T, \lambda]^T$, $\bar{F}(\hat{x}) = \text{diag}\{G(x) - \lambda I, H(x)\}$, $c = [0^T, 1]^T$, 则 $\bar{F}(\hat{x})$ 是 \hat{x} 的一个仿射函数, 且问题 (2.2.1) 可以写成:

$$\begin{aligned} & \min c^T \hat{x} \\ & \text{s.t. } \bar{F}(\hat{x}) < 0 \end{aligned}$$

一个线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 的可行性问题也可以写成一个 EVP:

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{s.t. } F(x) - \lambda I < 0 \end{aligned}$$

显然, 对任意的 x , 只要选取足够大的 λ , (x, λ) 就是上述问题的一个可行解, 因此上述问题一定有解。若其最小值 $\lambda^* \leq 0$, 则线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 是可行的。

3. 广义特征值问题 (GEVP): 在一个线性矩阵不等式约束下, 求两个仿射矩阵函数的最大广义特征值的最小化问题。

对给定的两个相同阶数的对称矩阵 G 和 F , 对标量 λ , 如果存在非零向量 y , 使得 $Gy = \lambda Fy$, 则 λ 称为矩阵 G 和 F 的广义特征值。矩阵 G 和 F 的最大广义特征值的计算问题可以转化成一个具有线性矩阵不等式约束的优化问题。

事实上, 假定矩阵 F 是正定的, 则对充分大的标量 λ , 有 $G - \lambda F < 0$ 。随着 λ 的减小, 并在某个适当的值, $G - \lambda F$ 将变为奇异的。因此, 存在非零向量 y 使得 $Gy = \lambda Fy$ 。这样的 λ 就是矩阵 G 和 F 的广义特征值。根据这样的思想, 矩阵 G 和 F 的最大广义特征值可以通过求解以下的优化问题得到:

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{s.t. } G - \lambda F < 0 \end{aligned}$$

当矩阵 G 和 F 是 x 的一个仿射函数时, 在一个线性矩阵不等式约束下, 求矩阵函数 $G(x)$ 和 $F(x)$ 的最大广义特征值的最小化问题的一般形式如下:

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ & \text{s.t. } G(x) < \lambda F(x) \\ & \quad F(x) > 0 \\ & \quad H(x) < 0 \end{aligned}$$

注意到上述问题中的约束条件关于 x 和 λ 并不同时是线性的。

以下通过一些例子来说明这些问题。

例 2.2.1 稳定性问题

考虑线性自治系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.2.3)$$

的渐近稳定性问题, 其中 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 。Lyapunov 稳定性理论告诉我们: 这个系统是渐近稳定的当且仅当存在一个对称矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得 $X > 0$, $A^T X + XA < 0$ 。因此系统 (2.2.3) 的渐近稳定性问题等价于线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & A^T X + XA \end{bmatrix} < 0$$

的可行性问题。

例 2.2.2 μ 分析问题

在 μ 分析中, 通常要求确定一个对角矩阵 D , 使得 $\|DED^{-1}\| < 1$, 其中 E 是一个给定的常数矩阵。由于

$$\begin{aligned} \|DED^{-1}\| < 1 &\Leftrightarrow D^{-T} E^T D^T DED^{-1} < I \\ &\Leftrightarrow E^T D^T DE < D^T D \\ &\Leftrightarrow E^T XE - X < 0 \end{aligned}$$

其中的 $X = D^T D > 0$ 。因此, 使得 $\|DED^{-1}\| < 1$ 成立的对角矩阵 D 的存在性问题等价于线性矩阵不等式 $E^T XE - X < 0$ 的可行性问题。

例 2.2.3 最大奇异值问题

考虑最小化问题 $\min f(x) = \sigma_{\max}(F(x))$, 其中 $F(x): \mathbf{R}^m \rightarrow S^n$ 是一个仿射的矩阵值函数。由于

$$\sigma_{\max}(F(x)) < \gamma \Leftrightarrow F^T(x)F(x) - \gamma^2 I < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质,

$$F^T(x)F(x) - \gamma^2 I < 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\gamma I & F^T(x) \\ F(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

因此, 可以通过求解:

$$\begin{aligned} \min_{x, \gamma} \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -\gamma I & F^T(x) \\ F(x) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

来得到所求问题的解。显然, 问题 (2.2.4) 是一个具有线性矩阵不等式约束的线性目标函数的最优化问题。

例 2.2.4 系统性能指标的求值问题

考虑线性自治系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2.5)$$

和二次型性能指标:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是给定的系统状态矩阵, \mathbf{x}_0 是已知的初始状态向量, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是给定的加权半正定矩阵。假定考虑的系统是渐近稳定的, 则该系统的任意状态向量均是平方可积的, 因此 $J < \infty$ 。

由于系统 (2.2.5) 是渐近稳定的, 因此线性矩阵不等式

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \leq 0$$

有对称正定解 \mathbf{X} 。沿系统 (2.2.5) 的任意轨线, 函数 $\mathbf{x}^T(t) \mathbf{X} \mathbf{x}(t)$ 关于时间的导数是:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{X} \mathbf{x}(t)] = \mathbf{x}^T(t) [\mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}] \mathbf{x}(t) \leq -\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t)$$

在以上不等式的两边分别从 $t=0$ 到 $t=T$ 积分, 可得

$$\mathbf{x}^T(T) \mathbf{X} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}^T(0) \mathbf{X} \mathbf{x}(0) \leq -\int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt$$

由于 $\mathbf{x}^T(T) \mathbf{X} \mathbf{x}(T) \geq 0$, 从上式可得

$$\int_0^T \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0$$

上式对所有的 T 都成立, 因此

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0$$

性能指标 J 的最小上界可以通过求解以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}_0^T \mathbf{X} \mathbf{x}_0 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{X} > 0 \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Q} \leq 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

得到。显然问题 (2.2.6) 是一个 EVP。

该例中提出的处理方法可以用来处理不确定系统的保性能控制问题。

2.3 求解线性矩阵不等式问题的算法

探询求解线性矩阵不等式的方法已有很长的历史。早期对于简单的线性矩阵不等式问题, 可以采用手工的方法来求解。对于二维的线性矩阵不等式问题, 则可以采用图解法求解。对于 Lyapunov 矩阵不等式和 Riccati 型的矩阵不等式, 通过分别将其转化为适当的矩

阵方程, 从而可以应用求解 Lyapunov 方程和 Riccati 方程的方法来求解 Lyapunov 矩阵不等式和 Riccati 型的矩阵不等式问题。例如对 Lyapunov 不等式 $A^T P + PA < 0$, 选定一个正定矩阵 Q , 通过求解 Lyapunov 方程 $A^T P + PA = -Q$ 来得到原来的 Lyapunov 不等式的解。但 Lyapunov 方程 $A^T P + PA = -Q$ 的解的存在性依赖于正定矩阵 Q 的选取, 对给定的正定矩阵 Q , 即使 Lyapunov 方程无解, 也不能推出相应的 Lyapunov 不等式无可行解。因此, 这种方法具有相当大的保守性和盲目性。

对一般的线性矩阵不等式问题, 可以将其列成一个凸优化问题, 并采用凸优化技术来进行数值求解, 椭球法就是这样一种方法。1988 年, Nesterov 和 Nemirovskii 提出了内点法, 并直接用来求解具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 取得了很好的效果。内点法为线性矩阵不等式问题的求解提供了有效的算法。正是内点法的出现, 使得线性矩阵不等式成为处理系统与控制问题的一种有效工具。

本节将介绍求解线性矩阵不等式问题的椭球法和内点法的主要思想。

2.3.1 椭球法

它的主要思路和步骤如下:

1. 求取一个包含最优点的椭球 E_0 , 通常可以通过求取一个包含可行域的椭球来满足这一要求 (如图 2.1(a)所示);

2. 假定在第 $k-1$ 步, 我们得到一个包含最优点的椭球 E_{k-1} , 求取一个通过该椭球中心点 x_{k-1} 的割平面, 并寻找一个向量 g_{k-1} , 使得最优解落在平面

$$\{x: g_{k-1}^T(x - x_{k-1}) \leq 0\}$$

中, 则 $R_k = E_{k-1} \cap \{x: g_{k-1}^T(x - x_{k-1}) \leq 0\}$ 包含了问题的最优解 (如图 2.1(b)所示);

3. 对问题的解所在的那半个椭球 R_k , 求取一个包含这半个椭球的最小体积的椭球 E_k (如图 2.1(c)所示);

4. 返回到第 2 步, 并重复以上的步骤 (如图 2.1(d)所示), 直至这一过程收敛到问题的最优解。

椭球法在思路类似于整数规划中的分枝定界法。

设 $F: V \rightarrow S^n$ 是一个仿射函数, 其中 $V \subset \mathbb{R}^m$ 。注意到 $F(x) < 0$ 当且仅当 $\lambda_{\max}(F(x)) < 0$ 。定义 $f(x) = \lambda_{\max}(F(x))$, 并考虑使得 f 最小化的问题。如果 $\inf f(x) < 0$, 则线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 是可行的, 否则该线性矩阵不等式就是不可行的。

以上定义的函数 f 是一个凸函数。事实上, 对所有的 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $x_1, x_2 \in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) &= \lambda_{\max}(F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)) \\ &= \lambda_{\max}(\alpha F(x_1) + (1-\alpha)F(x_2)) \\ &\leq \alpha \lambda_{\max}(F(x_1)) + (1-\alpha) \lambda_{\max}(F(x_2)) \\ &= \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \end{aligned}$$

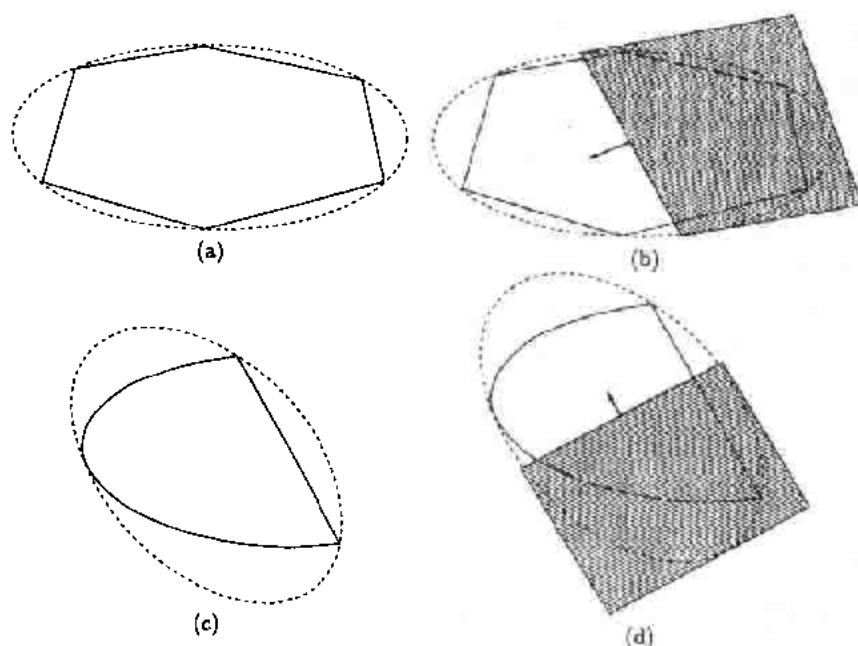


图 2.1 椭球法的迭代过程

对使得 $f(x)$ 最小化的问题，它的椭球法求解算法如下：

Step 0: 设 $x_0 \in V$, $P_0 \in S^m$ 是正定矩阵，定义椭球

$$E_0 = \{x \in V : (x - x_0)^T P_0^{-1} (x - x_0) \leq 1\}$$

Step k: 对 $k = 1, 2, \dots$

1. 计算 f 在 x_{k-1} 处的次梯度 $g_{k-1} \in \mathbb{R}^m$ ，并记

$$R_k = V \cap E_{k-1} \cap \{x : g_{k-1}^T (x - x_{k-1}) \leq 0\}$$

2. 计算 $x_k \in V$ 和 $P_k > 0$ ，使得椭球

$$E_k = \{x : (x - x_k)^T P_k^{-1} (x - x_k) \leq 1\}$$

包含 R_k 。以下的 x_k 和 P_k 具有这样的性质：

$$x_k = x_{k-1} - \frac{P_{k-1} g_{k-1}}{(m+1) \sqrt{g_{k-1}^T P_{k-1} g_{k-1}}}$$

$$P_k = \frac{m^2}{m^2 - 1} \left(P_{k-1} - \frac{2}{(m+1) g_{k-1}^T P_{k-1} g_{k-1}} P_{k-1} g_{k-1} g_{k-1}^T P_{k-1} \right)$$

3. 重复 Step k。

2.3.2 内点法

内点法是求解线性矩阵不等式问题的一个更为有效的算法。它的主要思路是：利用约束条件定义一个闸函数，该函数在可行域内部是凸的，在可行域外部则定义其值为无穷大。通过在目标函数中添加这样一个闸函数，使得原先的约束优化问题转化成一个无约束

的优化问题，而后者可以应用求解无约束优化问题的牛顿法来求解。内点法的思路类似于约束优化问题的罚函数法。

设 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow S^n$ 是一个仿射函数， $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个凸函数，其中 $V = \{x: F(x) < 0\}$ 。考虑优化问题：

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } F(x) < 0 \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

以下用内点法的思想来给出这个问题的求解方法。

首先，引进一个闸函数 φ 。这个函数要求是光滑的，且满足以下条件：

1. 它在 V 的内部是严格凸的；
2. 对任意给定的 $\{x_n\} \subset V$ ，如果 (x_n) 收敛到 V 的边界，则 $\varphi(x_n) \rightarrow \infty$ 。

给定这样一个闸函数后，约束优化问题 (2.3.1) 可以用以下的无约束优化问题

$$\min f_t(x) = tf(x) + \varphi(x) \quad (2.3.2)$$

来替代。其中 $t > 0$ 是一个参数，称为惩罚参数。在几乎所有用内点法来解决凸优化问题的算法中，都采用经典的牛顿迭代法来求解无约束优化问题 (2.3.2)，以得到其最小值 f_t 的近似值。在适当的条件下，对满足 $t_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 的参数序列 $\{t_n\}$ ，问题 (2.3.2) 的最优解序列 $\{x(t_n)\}$ 收敛到凸优化问题 (2.3.1) 的最优解。

通过以不同的方式将闸函数结合到问题 (2.3.1) 的目标函数中，可以构造出不同的无约束优化问题 (2.3.2)。但其处理问题 (2.3.1) 的主要思想还是相同的。

内点法可以用来求解 2.2 节中列出的三个线性矩阵不等式问题。

如果考虑线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 的可行性问题，选取

$$\varphi(x) = \begin{cases} \log \det[F^{-1}(x)] & x \in V \\ \infty & x \notin V \end{cases} \quad (2.3.3)$$

如果可行域 V 是非空和有界的，则以上定义的 $\varphi(x)$ 是严格凸的，因此 $\varphi(x)$ 就可以作为可行域 V 的一个闸函数。由于 $\varphi(x)$ 是一个严格的凸函数，故存在惟一的 $\bar{x} \in V$ ，使得 $\varphi(\bar{x})$ 是函数 $\varphi(x)$ 的全局最小值。这样的点 $\bar{x} \in V$ 称为可行域 V 的解析中心 (analytic center)。

在线性矩阵不等式 $F(x) < 0$ 约束下，使得目标函数 $f(x)$ 最小化的优化问题可以转化成以下线性矩阵不等式的可行性问题：

$$\bar{F}_t(x) = \begin{bmatrix} f(x) - t & 0 \\ 0 & F(x) \end{bmatrix} < 0$$

其中 $t > t^* = \inf_{F(x) < 0} f(x)$ 是一个惩罚参数。利用这个线性矩阵不等式的形如 (2.3.3) 的闸函数可以导出使得

$$g_t(x) = \log \det \bar{F}_t^{-1}(x) = \log \frac{1}{f(x) - t} + \log \det F^{-1}(x)$$

最小化的一个无约束优化问题。由于对所有的 $t > t^*$ ， g_t 是严格凸的，故使得 g_t 最小的 $x(t)$ 是惟一的。可以证明：对所有的 $t > t^*$ ， $x(t)$ 都是可行的，且当 $t \rightarrow t^*$ 时， $x(t)$ 将趋

向于原问题的最优解。

2.4 关于矩阵不等式的一些结论

本节将讨论一些在用线性矩阵不等式方法来研究系统与控制问题时遇到的矩阵不等式问题。

2.4.1 矩阵变量的消去法

一个矩阵不等式往往包含多个变量,若能将这样一个矩阵不等式转化成一个只包含较少变量的等价不等式,则往往会使得矩阵不等式的求解变得更加容易和方便。这一小节将主要介绍这方面的内容。这里介绍的方法和结果在控制系统输出反馈控制器的设计中起着很重要的作用。

在给出主要的结论前,首先给出以下的一个结论。

引理 2.4.1 设 Z 是一个对称矩阵,且被分解成 3 行 3 列的分块矩阵形式,则存在矩阵 X ,使得

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} + X^T \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T + X & Z_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.1)$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{13} \\ Z_{13}^T & Z_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.2)$$

如果 (2.4.2) 式成立,则使得不等式 (2.4.1) 成立的一个矩阵 X 如下:

$$X = Z_{13}^T Z_{11}^{-1} Z_{12} - Z_{23}^T$$

证明 如果不等式 (2.4.1) 有解,则根据矩阵负定性的性质可知: (2.4.1) 式左边矩阵中各个主子式所对应的矩阵也是负定的,由此可得 (2.4.2) 式成立。

反之,假定 (2.4.2) 式成立,则可得 $Z_{11} < 0$,应用矩阵的 Schur 补性质, (2.4.1) 式等价于

$$\begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{23} + X^T \\ Z_{23}^T + X & Z_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{12}^T \\ Z_{13}^T \end{bmatrix} Z_{11}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{12} & Z_{13} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.3)$$

由 (2.4.2) 式可得上式左边矩阵中对角线上的矩阵均是负定的。如果取 $X = Z_{13}^T Z_{11}^{-1} Z_{12} - Z_{23}^T$,则可以将上式左边矩阵中非对角线上的矩阵化为零。因此,对角线上矩阵的负定性保证了 (2.4.3) 式成立,所以这样一个 X 是不等式 (2.4.1) 的解。引理得证。

定理 2.4.1 设 P, Q 和 H 是给定的适当维数矩阵, 且 H 是对称的, N_P 和 N_Q 分别是由核空间 $\ker(P)$ 和 $\ker(Q)$ 的任意一组基向量作为列向量构成的矩阵, 则存在一个矩阵 X , 使得

$$H + P^T X^T Q + Q^T X P < 0 \quad (2.4.4)$$

当且仅当

$$N_P^T H N_P < 0, N_Q^T H N_Q < 0 \quad (2.4.5)$$

证明 必要性: 由矩阵 N_P 和 N_Q 的构造, 可得 $P N_P = 0$ 、 $Q N_Q = 0$ 。若存在矩阵 X , 使得矩阵不等式 (2.4.4) 成立, 则对 (2.4.4) 式左端的矩阵分别左乘矩阵 N_P^T 和右乘矩阵 N_P , 可得 $N_P^T H N_P < 0$ 。同理可得 $N_Q^T H N_Q < 0$ 。

充分性: 我们将用一个构造性的方法来证明这一部分。

设 V_1 是由 $\ker(P) \cap \ker(Q)$ 的任意一组基向量作为列向量所构成的矩阵, 则存在矩阵 V_2 和 V_3 , 使得

$$\text{Image}([V_1 \ V_2]) = \ker(P), \text{Image}([V_1 \ V_3]) = \ker(Q)$$

不失一般性, 可以假定 V_2 和 V_3 是满列秩的。由线性代数中的知识可知, V_1, V_2 和 V_3 中的列向量构成了 $\ker(P) \oplus \ker(Q)$ 中的一组基, 因此可以将这一组列向量进一步扩充成整个空间中的一组基, 即存在矩阵 V_4 使得 $V = [V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4]$ 是方阵, 且是非奇异的。利用矩阵 V 可得矩阵不等式 (2.4.4) 成立当且仅当

$$V^T H V + V^T P^T X^T Q V + V^T Q^T X P V < 0 \quad (2.4.6)$$

根据矩阵 V 的构造, 有

$$P V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix}, Q V = \begin{bmatrix} 0 & Q_1 & 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

按矩阵 V 的分块方式, 将 $V^T H V$ 分块:

$$V^T H V = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{13}^T & H_{23}^T & H_{33} & H_{34} \\ H_{14}^T & H_{24}^T & H_{34}^T & H_{44} \end{bmatrix}$$

定义矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \end{bmatrix} X^T \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

根据矩阵 P_1, P_2, Q_1 和 Q_2 的定义, 有 $\ker([P_1 \ P_2]) = 0$ 、 $\ker([Q_1 \ Q_2]) = 0$ 。因此, 对任意给定的矩阵 Y , 存在一个适当的矩阵 X , 使得 (2.4.7) 式成立。

利用以上各个分块矩阵, 矩阵不等式 (2.4.6) 可以写成

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} + Y_{11}^T & H_{24} + Y_{21}^T \\ H_{13}^T & H_{23}^T + Y_{11} & H_{33} & H_{34} + Y_{12}^T \\ H_{14}^T & H_{24}^T + Y_{21} & H_{34}^T + Y_{12} & H_{44} + Y_{22} + Y_{22}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.8)$$

对上式左边矩阵中左上角的 3×3 块子矩阵应用矩阵的 Schur 补性质, 得上式成立当且仅当以下的两个矩阵不等式成立:

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{12}^T & H_{22} & H_{23} + Y_{11}^T \\ H_{13}^T & H_{23}^T + Y_{11} & H_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.9)$$

$$H_{44} + Y_{22} + Y_{22}^T - \begin{bmatrix} H_{14} \\ H_{24} + Y_{21}^T \\ H_{34} + Y_{12}^T \end{bmatrix}^T \bar{H}^{-1} \begin{bmatrix} H_{14} \\ H_{24} + Y_{21}^T \\ H_{34} + Y_{12}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.4.10)$$

如果能选取一个适当的 Y_{11} , 使得不等式 (2.4.9) 成立, 则总可以选取适当的 Y_{12} 、 Y_{21} 和 Y_{22} , 使得不等式 (2.4.10) 成立。因此, 存在一个矩阵 Y , 使得不等式 (2.4.9) ~ (2.4.10) 成立当且仅当存在一个适当的矩阵 Y_{11} , 使得 $\bar{H} < 0$ 成立。

另一方面, 由于

$$\ker(PV) = \text{Image} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \ker(QV) = \text{Image} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由条件 (2.4.5) 推出

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} H_{11} & H_{13} \\ H_{13}^T & H_{33} \end{bmatrix} < 0$$

因此, 应用引理 2.4.1 可得: 在条件 (2.4.5) 下, 存在矩阵 Y_{11} , 使得 $\bar{H} < 0$, 进而可得存在矩阵 Y , 使得不等式 (2.4.8) 成立。由于对任意的矩阵 Y , 都存在满足 (2.4.7) 式的矩阵 X , 因此进一步可得矩阵不等式 (2.4.4) 存在解矩阵 X 。

综合以上两方面, 得证定理。

如果 $\ker(P)$ 或 $\ker(Q)$ 中有一个是零空间时, 则可以删去相应的一个矩阵不等式条件。例如, 当 $\ker(P) = 0$ 时, $N_Q^T H N_Q < 0$ 就是矩阵不等式 (2.4.4) 可解的一个充分必要条件。

2.4.2 S-procedure

在控制系统的鲁棒分析和鲁棒综合中, 我们常常要用 S-procedure 来将一些不是凸约束的问题转化成线性矩阵不等式约束。

对 $k = 0, 1, 2, \dots, N$, 设 $\sigma_k: V \rightarrow \mathbf{R}$ 是定义在一个线性向量空间 V (例如 $V = \mathbf{R}^n$) 上

的实值泛函, 考虑以下的两个条件:

S_1 : 对使得 $\sigma_k(y) \geq 0, k=1, 2, \dots, N$ 的所有 $y \in V$, 有 $\sigma_0(y) \geq 0$;

S_2 : 存在标量 $\tau_k \geq 0, k=1, 2, \dots, N$, 使得对任意的 $y \in V$,

$$\sigma_0(y) - \sum_{k=1}^N \tau_k \sigma_k(y) \geq 0$$

容易看到条件 S_2 可以推出条件 S_1 . S-procedure 就是通过判断条件 S_2 的真实性来验证条件 S_1 的成立与否. 一般来说, 条件 S_2 比条件 S_1 要更容易检验, 因此, 通过应用 S-procedure 可以找到检验条件 S_1 成立与否的一个更加有效的方法.

考虑二次型函数的情况:

$$\sigma_k(y) = y^T Q_k y + 2s_k^T y + r_k, \quad k=0, 1, \dots, N$$

其中: $y \in V = \mathbf{R}^m, Q_k \in \mathbf{R}^{m \times m}, s_k \in \mathbf{R}^m, r_k \in \mathbf{R}, Q_k$ 是对称的. 由于:

1. σ_0 一般不是一个凸函数;

2. 约束集 $\Omega = \{y \in \mathbf{R}^m : \sigma_k(y) \geq 0, k=1, 2, \dots, N\}$ 一般也不是凸的.

因此, 条件 S_1 相当于要求一个非凸函数在一个非凸集上的最小值是非负的, 即 $\min_{y \in \Omega} \sigma_0(y) \geq 0$. 这是一个 NP 困难的问题.

另一方面, 由于:

条件 $S_2 \Leftrightarrow$ 存在 $\tau_k \geq 0$, 使得对任意的 $y \in \mathbf{R}^m$, $\sigma_0(y) - \sum_{k=1}^N \tau_k \sigma_k(y) \geq 0$;

\Leftrightarrow 存在 $\tau_k \geq 0$, 使得对任意的 $y \in \mathbf{R}^m$,

$$\begin{bmatrix} y^T \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_0 + \sum \tau_k Q_k & s_0 + \sum \tau_k s_k \\ s_0^T + \sum \tau_k s_k^T & r_0 + \sum \tau_k r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

\Leftrightarrow 存在 $\tau_k \geq 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} Q_0 & s_0 \\ s_0^T & r_0 \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^N \tau_k \begin{bmatrix} Q_k & s_k \\ s_k^T & r_k \end{bmatrix} \geq 0$$

因此, 条件 S_2 表示成了一个等价的线性矩阵不等式的可行性问题, 可以应用求解线性矩阵不等式的有效方法来方便地判断这个线性矩阵不等式问题是否是可行的. S-procedure 告诉我们可以检验上面这个线性矩阵不等式问题的可行性来检验条件 S_1 是否成立.

条件 S_1 和条件 S_2 一般是不等价的, 当这两个条件等价时, 我们称这个 S-procedure 是无损的, 否则称为有损的.

在应用中, 使用的 S-procedure 常常是有损的. 如在控制系统稳定性的检验中, 应用有损的 S-procedure 所导出的检验条件只是稳定性的一个充分条件, 而不能保证是必要的. 这种稳定性条件的保守性的引进换来的是检验和计算上的方便和有效性.

以下结论在鲁棒控制中是很有用的.

定理 2.4.2 (1) 对 $\sigma_1(y) = y^T Q_1 y + 2s_1^T y + r_1 \geq 0$, 假定存在一个 $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, 使得 $\sigma_1(\tilde{y}) > 0$, 则以下两个条件是等价的.

$S_1^{(1)}$: 对使得 $\sigma_1(y) \geq 0$ 的所有 $y \in \mathbf{R}^m$, $\sigma_0(y) = y^T Q_0 y + 2s_0^T y + r_0 \geq 0$;

$S_2^{(1)}$: 存在 $\tau \geq 0$, 使得以下的线性矩阵不等式是可行的:

$$\begin{bmatrix} Q_0 & s_0 \\ s_0^T & r_0 \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} Q_1 & s_1 \\ s_1^T & r_1 \end{bmatrix} \geq 0$$

(2) 对 $\sigma_1(y) = y^T Q_1 y \geq 0$, 假定存在一个 $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, 使得 $\sigma_1(\tilde{y}) > 0$, 则以下两个条件是等价的。

$S_1^{(2)}$: 对使得 $\sigma_1(y) \geq 0$ 的所有非零 $y \in \mathbf{R}^m$, $y^T Q_0 y > 0$;

$S_2^{(2)}$: 存在 $\tau \geq 0$, 使得 $Q_0 - \tau Q_1 > 0$ 。

以下给出一个应用 S-procedure 的例子。

利用定理 2.4.2 可以知道: 存在对称矩阵 $P > 0$, 使得对满足 $\pi^T \pi \leq \xi^T C^T C \xi$ 的所有 $\xi \neq 0$ 和 π ,

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \pi \end{bmatrix} < 0$$

成立当且仅当存在标量 $\tau \geq 0$ 和对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \tau C^T C & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} < 0$$

显然, 上面的不等式是一个关于矩阵 P 和标量 τ 的线性矩阵不等式。

第3章 系统性能分析

3.1 连续时间系统

3.1.1 系统增益指标

考虑线性时不变的连续时间系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t)\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

其中： $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态， $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^q$ 是外部扰动输入， $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是感兴趣的系统被调输出。如果对某一类外部扰动信号 $\mathbf{w}(t)$ ，系统的被调输出 $\mathbf{z}(t)$ 总能保持是“小”的，我们认为具有这样性能的系统具有“好”的性能。事实上，这说明了外部扰动对系统的影响很小，因此，反映了系统抑制外部扰动的能力。本节的目的就是要定义描述系统性能的一些定量指标，并且给出这些指标的刻画和计算方法。

量化系统性能的一种标准方法就是考虑系统的增益 Γ ：

$$\Gamma = \sup_{\mathbf{w} \neq 0} \frac{\text{size}(\mathbf{z})}{\text{size}(\mathbf{w})}$$

或等价的

$$\Gamma = \sup_{\mathbf{w}} \{ \text{size}(\mathbf{z}) : \text{size}(\mathbf{w}) \leq 1 \}$$

$\text{size}(\mathbf{z})$ 表示信号 \mathbf{z} 大小的某种度量。 Γ 度量了在零初始条件下，对应于最坏扰动输入的系统输出信号 \mathbf{z} 的大小。因此，系统的增益越小，系统的性能也就越好。然而，度量信号大小的方式有很多种，对于不同的度量方式，相应的系统增益也就不同，从而得到不同的系统性能度量。以下给出一些常用的描述信号大小的方法。

对平方可积的信号 f ，定义 $\|f\|_2 = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$ ，其中 $\|f(t)\| = \sqrt{f^T(t)f(t)}$ 是向量的欧氏范数。这样定义的 $\|f\|_2$ 正好是信号 f 的能量。将所有有限能量信号的全体记成 L_2 ，即

$$L_2 = \left\{ f : \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt < \infty \right\}$$

$\|f\|_2$ 也称为信号 f 的 L_2 范数。

对幅值有界的信号 f , 定义 $\|f\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|f(t)\|$, 其中 $\|f(t)\|$ 是向量的欧氏范数。当 f 是一个标量信号时, $\|f\|_\infty$ 等于 f 的峰值。将所有幅值有界的信号全体记成 L_∞ , 即

$$L_\infty = \{f: \|f(t)\| < \infty\}$$

$\|f\|_\infty$ 也称为信号 f 的 L_∞ 范数。

一个脉冲信号 $f(t) = f_0 \delta(t)$ 的大小可以用 $\|f_0\|$ 来度量, $\delta(t)$ 是 delta 函数。

利用以上定义的度量信号大小的范数, 可以定义系统 (3.1.1) 的一些性能指标:

- IE (Impulse-to-Energy) 增益: $\Gamma_{ie} = \sup_{\substack{w(t)=w_0\delta(t) \\ \|w_0\| \leq 1}} \|z\|_2;$
- EP (Energy-to-Peak) 增益: $\Gamma_{ep} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty;$
- EE (Energy-to-Energy) 增益: $\Gamma_{ee} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_2;$
- PP (Peak-to-Peak) 增益: $\Gamma_{pp} = \sup_{\|w\|_\infty \leq 1} \|z\|_\infty.$

为了用以上定义的这些性能指标来分析系统的性能, 需要给出这些性能指标的刻画和计算方法。本节将介绍这方面的一些结果。

定理 3.1.1 如果系统 (3.1.1) 是严格真的 (即 $D=0$) 和渐近稳定的, 则系统的 IE 增益 Γ_{ie} 是有限的, 且 $\Gamma_{ie} = \|B^T Y B\|^{1/2}$, 其中矩阵的范数取成谱范数, 即矩阵的最大奇异值, 矩阵 Y 是以下 Lyapunov 方程的解:

$$YA + A^T Y + C^T C = 0 \quad (3.1.2)$$

Γ_{ie} 也可以由下式得到

$$\Gamma_{ie} = \inf_P \left\{ \|B^T P B\|^{1/2} : PA - A^T P + C^T C < 0 \right\} \quad (3.1.3)$$

证明 在零初始状态下, 系统 (3.1.1) 的状态轨线是

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau$$

对于脉冲扰动 $w(t) = w_0 \delta(t)$, 系统的输出是 $z(t) = C e^{At} B w_0$ 。因此, 输出信号 z 的 L_2 范数是

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \int_0^\infty w_0^T B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B w_0 dt \\ &= w_0^T B^T Y B w_0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

其中的 $Y = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$ 。由于系统是渐近稳定的, 故矩阵 Y 存在, 且满足 Lyapunov 方程 (3.1.2)。进一步, 由矩阵的性质和矩阵范数的定义, 对任意满足 $\|w_0\| \leq 1$ 的 w_0 ,

$$\|z\|_2^2 \leq \|B^T Y B\| w_0^T w_0 \leq \|B^T Y B\|$$

因此, $\Gamma_{ie} \leq \|B^T Y B\|^{1/2}$ 。

另一方面, 如果取 w_0 是对应于矩阵 $B^T Y B$ 的最大特征值的单位特征向量, 则

$$\Gamma_{ie}^2 \geq w_0^T B^T Y B w_0 = \|B^T Y B\|$$

结合以上两方面的讨论, 得到 $\Gamma_{ie} = \|B^T Y B\|^{1/2}$ 。

将 (3.1.3) 式中的 Lyapunov 不等式和 Lyapunov 方程 (3.1.2) 相减, 并记 $R = P - Y$, 得到

$$RA + A^T R < 0 \quad (3.1.5)$$

由矩阵 A 的渐近稳定性可得 $R > 0$, 故 $P > Y \geq 0$ 。因此, 对 (3.1.3) 式中 Lyapunov 矩阵不等式的任意解矩阵 P , $\Gamma_{ie} \leq \|B^T P B\|^{1/2}$ 。

进而, 由不等式 (3.1.5) 可以知道, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 Lyapunov 方程 (3.1.2) 的解矩阵 Y , 存在一个满足 (3.1.3) 式中矩阵不等式的矩阵 P , 使得 $\|P - Y\| \leq \varepsilon$ 。这就证明了关系式 (3.1.3)。即定理得证。

根据定理 3.1.1, 如果以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & PA + A^T P + C^T C < 0 \\ & B^T P B \leq \gamma I \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

有一个最优值 γ^* , 则 $\Gamma_{ie} = \sqrt{\gamma^*}$ 。而优化问题 (3.1.6) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题的全局最优解。

定理 3.1.2 如果系统 (3.1.1) 是严格真 (即 $D = 0$) 和渐近稳定的, 则系统的 EP 增益 Γ_{ep} 是有限的, 且 $\Gamma_{ep} = \|CXC^T\|^{1/2}$, 其中 X 是以下 Lyapunov 方程

$$AX + XA^T + BB^T = 0 \quad (3.1.7)$$

的解。 Γ_{ep} 也可以由下式确定:

$$\Gamma_{ep} = \inf_Q \left\{ \|CQC^T\|^{1/2} : AQ + QA^T + BB^T < 0 \right\} \quad (3.1.8)$$

证明 设 Q 是满足 (3.1.8) 式中 Lyapunov 不等式的一个对称矩阵, 由于矩阵 A 是渐近稳定的, 故 $Q > 0$ 。对 (3.1.8) 式中的 Lyapunov 不等式左乘和右乘矩阵 Q^{-1} , 并应用矩阵的 Schur 补性质, 可得

$$\Phi = \begin{bmatrix} Q^{-1}A + A^T Q^{-1} & Q^{-1}B \\ B^T Q^{-1} & -I \end{bmatrix} < 0$$

对满足状态方程 (3.1.1) 的任意信号 x 和 w , 定义 $v^T = [x^T \ w^T]$, 并考虑:

$$\begin{aligned} v^T(t)\Phi v(t) &= x^T(t)Q^{-1}[Ax(t) + Bw(t)] + [Ax(t) + Bw(t)]^T Q^{-1}x(t) - w^T(t)w(t) \\ &= \frac{d}{dt}[x^T(t)Q^{-1}x(t)] - \|w(t)\|^2 < 0 \end{aligned}$$

对上式从 $t=0$ 到 $t=\tau$ 积分, 并利用零初始条件, 可得

$$x^T(\tau)Q^{-1}x(\tau) < \int_0^\tau \|w(t)\|^2 dt \leq \|w\|_2^2$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 从上式得到

$$\begin{bmatrix} \|w\|_2^2 & x^T(\tau) \\ x(\tau) & Q \end{bmatrix} > 0$$

由此, 进一步可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|w\|_2^2 & x^T(\tau) \\ x(\tau) & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|w\|_2^2 & z^T(\tau) \\ z(\tau) & CQC^T \end{bmatrix} \geq 0$$

对上式再一次使用矩阵的 Schur 补性质, 可得

$$\frac{1}{\|w\|_2^2} z(\tau)z^T(\tau) \leq CQC^T \leq \|CQC^T\|I$$

因此, 对所有的 $\|w\|_2 \leq 1$,

$$z^T(\tau)z(\tau) \leq \|w\|_2^2 \|CQC^T\| \leq \|CQC^T\|$$

由于上面的关系式对所有的 $\tau \geq 0$ 和 (3.1.8) 式中 Lyapunov 不等式的所有解矩阵 Q 成立, 因此证明了:

$$\Gamma_{\infty} \leq \inf_Q \left\{ \|CQC^T\|^{1/2} : AQ + QA^T + BB^T < 0 \right\} = \|CXC^T\|^{1/2} \quad (3.1.9)$$

其中的矩阵 X 是 Lyapunov 方程 (3.1.7) 的解。上式最后一个等式关系可类似于定理 3.1.1 的证明得到。

以下证明 (3.1.9) 式中相反的不等号 \geq 也成立。为此选择一个特殊的扰动信号:

$$w_T(t) = \begin{cases} \lambda_T^{-1/2} B^T e^{A^T(T-t)} C^T v_T & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T < t) \end{cases}$$

其中的 v_T 是矩阵 $CX_T C^T$ 对应于最大特征值 λ_T 的单位特征向量,

$$X_T = \int_0^T e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

注意到对固定的 $T > 0$,

$$\begin{aligned} \|w_T\|_2^2 &= \int_0^T \frac{1}{\lambda_T} v_T^T C e^{A(T-t)} B B^T e^{A^T(T-t)} C^T v_T dt \\ &= \frac{1}{\lambda_T} v_T^T (CX_T C^T) v_T = 1 \end{aligned}$$

对这样的扰动信号 w_T ，我们将证明系统的输出信号 z_T 随着 $T \rightarrow \infty$ 而趋向于 $\|CXC^T\|^{1/2}$ 。

为此，首先注意到：

$$\begin{aligned} z_T(T) &= \int_0^T C e^{A(T-\tau)} B (\lambda_T^{-1/2} B^T e^{A^T(T-\tau)} C^T v_T) d\tau \\ &= \lambda_T^{-1/2} C X_T C^T v_T \end{aligned}$$

因此，

$$\|z_T(T)\|^2 = \frac{1}{\lambda_T} v_T^T (C X_T C^T)^2 v_T = \lambda_T$$

取极限，可得

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|z_T(T)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda_T = \|CXC^T\|$$

这就证明了 $\Gamma_{\text{ep}} \geq \|CXC^T\|^{1/2}$ 。结合两个方向的不等式得到定理的结论，定理得证。

类似于问题 (3.1.6)，可以建立以下的优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & A Q + Q A^T + B B^T < 0 \\ & C Q C^T \leq \gamma I \\ & Q > 0 \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

如果该问题有一个最优值 γ^* ，则 $\Gamma_{\text{ep}} = \sqrt{\gamma^*}$ 。而优化问题 (3.1.10) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题。因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题的全局最优解。

定理 3.1.3 对系统 (3.1.1)，设 $\gamma > 0$ 是一个给定的常数，则以下条件是等价的：

- (i) 系统渐近稳定，且 $\Gamma_{\text{ee}} < \gamma$ ；
- (ii) 存在一个对称矩阵 $P > 0$ ，使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.1.11}$$

证明 证明 (ii) \Rightarrow (i)。

对矩阵不等式 (3.1.11) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{\gamma^{1/2} I, \gamma^{1/2} I, \gamma^{-1/2} I\}$ ，并记 $X = \gamma P$ ，可得存在对称矩阵 $P > 0$ ，使得矩阵不等式 (3.1.11) 成立当且仅当存在一个对称矩阵 $X > 0$ ，使得

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.1.12}$$

由矩阵不等式 (3.1.12) 可推出 $A^T X + X A < 0$ 。由于矩阵 $X > 0$ ，因此系统 (3.1.1)

是渐近稳定的, 且 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(t)X\mathbf{x}(t)$ 是系统 (3.1.1) 的一个 Lyapunov 函数。

由于矩阵不等式 (3.1.12) 是严格成立的, 故总是可以选择一个适当的常数 ε , $0 < \varepsilon < 1$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma^2(1-\varepsilon)I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma^2(1-\varepsilon)I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.1.13)$$

对任意的 $T > 0$, 考虑

$$J_T = \int_0^T \|\mathbf{z}(t)\|^2 dt - (1-\varepsilon)\gamma^2 \int_0^T \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt$$

则在零初始状态条件下,

$$\begin{aligned} J_T &= \int_0^T [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2(1-\varepsilon)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)] dt \\ &= \int_0^T [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2(1-\varepsilon)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) + \frac{d}{dt}V(\mathbf{x})] dt - V(\mathbf{x}(T)) \\ &= \int_0^T [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2(1-\varepsilon)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)X(A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{w}(t))] dt - V(\mathbf{x}(T)) \\ &= \int_0^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma^2(1-\varepsilon)I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} dt - V(\mathbf{x}(T)) \end{aligned}$$

利用矩阵不等式 (3.1.13), 从上式可得

$$\int_0^T [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2(1-\varepsilon)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) + \frac{d}{dt}V(\mathbf{x})] dt < 0$$

进一步利用零初始条件, 即得

$$\mathbf{x}^T(T)X\mathbf{x}(T) + \int_0^T \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) dt < \gamma^2(1-\varepsilon) \int_0^T \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) dt$$

由 $\mathbf{w} \in L_2[0, \infty)$ 及系统的渐近稳定性, 在上式两边令 $T \rightarrow \infty$, 得到

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 \leq \gamma^2(1-\varepsilon)\|\mathbf{w}\|_2^2 < \gamma^2\|\mathbf{w}\|_2^2$$

由此即可得到 $\Gamma_{\infty} < \gamma$ 。

矩阵不等式 (3.1.11) 是一个线性矩阵不等式, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断系统增益 Γ_{∞} 是否满足给定的约束条件。

定理 3.1.4 对系统 (3.1.1) 和给定的标量 γ , 如果存在对称矩阵 $R > 0$ 、标量 $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T R + RA + \lambda R & RB \\ B^T R & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.1.14)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda R & 0 & C^T \\ 0 & (\gamma - \mu)I & D^T \\ C & D & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.1.15)$$

则 $\Gamma_{pp} < \gamma$ 。

证明 沿系统 (3.1.1) 的任意轨线, 从矩阵不等式 (3.1.14) 可得

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{x}^T(t)R\mathbf{x}(t)] + \lambda \mathbf{x}^T(t)R\mathbf{x}(t) - \mu \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) < 0$$

假定 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$, $\|\mathbf{w}\|_\infty \leq 1$, 则由 $R > 0$, 可得对所有的 $t \geq 0$, 有

$$\mathbf{x}^T(t)R\mathbf{x}(t) \leq \frac{\mu}{\lambda}$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 由矩阵不等式 (3.1.15) 可得: 存在某个适当的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \lambda R & 0 \\ 0 & (\gamma - \mu)I \end{bmatrix} - \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} > 0$$

因此, 对所有的 $t \geq 0$ 和 $\|\mathbf{w}\|_\infty \leq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) &\leq (\gamma - \varepsilon)[\lambda \mathbf{x}^T(t)R\mathbf{x}(t) + (\gamma - \mu)\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)] \\ &\leq \gamma(\gamma - \varepsilon) \end{aligned}$$

由此, 即得 $\Gamma_{pp} < \gamma$ 。定理得证。

和前面几个结论不同的是, 定理 3.1.4 只给出了增益 Γ_{pp} 满足 $\Gamma_{pp} < \gamma$ 的一个充分条件, 使得矩阵不等式 (3.1.14) ~ (3.1.15) 成立的最小 $\gamma \geq 0$ 通常也只是增益 Γ_{pp} 的一个上界。另外, 矩阵不等式 (3.1.14) ~ (3.1.15) 并不是一个线性矩阵不等式系统。

对一个线性时不变系统, 其传递函数 $T(s)$ 可以看成是信号空间之间的一个算子。系统增益 Γ_{ie} 、 Γ_{ep} 、 Γ_{ee} 和 Γ_{pp} 是在信号空间适当范数下, 传递函数 $T(s)$ 的导出范数。

3.1.2 H_2 性能

传递函数矩阵 $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 的 H_2 范数定义成

$$\|T(s)\|_2 = \text{Trace} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)T^*(j\omega)d\omega \right)^{1/2}$$

或等价的,

$$\|T(s)\|_2 = \text{Trace} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^*(j\omega)T(j\omega)d\omega \right)^{1/2}$$

其中的 $T^*(j\omega)$ 表示矩阵 $T(j\omega)$ 的共轭转置, $\text{Trace}()$ 表示矩阵 $()$ 的迹。

以下来看一下这样一个系统 H_2 范数的意义。首先考虑以下形式的脉冲输入:

$$w(t) = \delta(t)e_i$$

其中: e_i 是空间 \mathbf{R}^q 中标准基的第 i 个基向量, $i=1, \dots, q$, 则对应于输入 w 和初始条件 $x(0)=0$ 的系统输出 z^i 可以惟一确定,

$$z^i(t) = \begin{cases} C \exp(At) B e_i & t > 0 \\ D e_i \delta(t) & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

由于系统假定是稳定的, 所以当 $D=0$ 时, 对所有的 $i=1, \dots, q$, 输出 z^i 都是平方可积的, 且

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \|z^i\|_2^2 &= \text{Trace} \int_0^\infty B^\top \exp(A^\top t) C^\top C \exp(At) B dt \\ &= \text{Trace} \int_0^\infty C \exp(At) B B^\top \exp(A^\top t) C^\top dt \end{aligned}$$

而著名的 Parseval 引理告诉我们: 上式中的最后一个表达式等于

$$\frac{1}{2\pi} \text{Trace} \int_{-\infty}^{\infty} T(i\omega) T^*(i\omega) d\omega$$

这恰好是传递函数 $T(s)$ 的 H_2 范数。这一事实说明了 T 的 H_2 范数的平方等于系统脉冲响应的总的输出能量。这一关系还提供了确定一个稳定有理传递函数 H_2 范数的直接计算方法。

对系统 (3.1.1), 定义矩阵:

$$X = \int_0^\infty \exp(At) B B^\top \exp(A^\top t) dt$$

$$Y = \int_0^\infty \exp(A^\top t) C^\top C \exp(At) dt$$

矩阵 X 正好是系统 (3.1.1) 的能控格拉姆 (controllability gramian) 矩阵, 而 Y 则是系统的能观格拉姆 (observability gramian) 矩阵。它们分别满足以下的 Lyapunov 方程:

$$AX + XA^\top + BB^\top = 0$$

$$YA + A^\top Y + C^\top C = 0$$

因此, 可以得到

$$\|T(s)\|_2^2 = \text{Trace}(CX C^\top) = \text{Trace}(B^\top Y B)$$

H_2 范数的第二个解释是在随机意义下考虑。假定系统 (3.1.1) 中的输入 w 是独立零均值的白噪声过程, 那么在零初始条件下, 系统的状态方差矩阵

$$W(t) = E[x(t)x^\top(t)]$$

满足以下的矩阵方程:

$$\dot{W} = AW + WA^\top + BB^\top, \quad W(0) = 0$$

因此, 当 $D=0$ 时, 输出方差

$$\begin{aligned} E[z^T(t)z(t)] &= E[x^T(t)C^T Cx(t)] = E[\text{Trace}[Cx(t)x^T(t)C^T]] \\ &= \text{Trace}(CWC^T) \end{aligned}$$

由于系统是渐近稳定的, 故 $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)$ 存在, 且等于系统的能控格拉姆矩阵 X 。因此, 系统的稳态输出方差

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z^T(t)] = \text{Trace}(CWC^T)$$

这正是系统 H_2 范数的平方。这一事实说明了系统的 H_2 范数也可以用系统在白噪声输入信号激励下的稳态输出方差来解释。

以上说明了系统 H_2 范数的实际意义, 它是控制系统中的一个重要性能指标。

系统增益 Γ_{ic} 和 Γ_{cp} 与传递函数矩阵 $T(s)$ 的 H_2 范数有着密切的关系。对标量 $a \geq 0$, 当把它看成是一个矩阵时, 有 $\text{Trace}(a) = \|a\|$ 。故对单输入单输出系统, $\|T(s)\|_2 = \Gamma_{ic} = \Gamma_{cp}$ 。

以下定理用线性矩阵不等式刻画了系统的 H_2 范数。

定理 3.1.5 假定系统 (3.1.1) 是渐近稳定的, 则:

1. $\|T\|_2 < \infty$, 当且仅当 $D = 0$;
2. 如果 $D = 0$, 则以下的结论是等价的:

(i) $\|T\|_2 < \gamma$

(ii) 存在对称矩阵 $X > 0$, 使得

$$AX + XA^T + BB^T < 0, \quad \text{Trace}(CXC^T) < \gamma^2 \quad (3.1.16)$$

(iii) 存在对称矩阵 $Y > 0$, 使得

$$A^T Y + YA + C^T C < 0, \quad \text{Trace}(B^T YB) < \gamma^2 \quad (3.1.17)$$

证明 容易从前面的讨论得到本定理的结论。

根据该定理, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `fcasp` 来检验系统是否满足给定的 H_2 范数约束条件。进一步, 还可以用求解器 `mincx` 来计算系统传递函数 H_2 范数的最小上界。

Rotea (1993) 证明了

$$\Gamma_{cp} = \frac{1}{2\pi} \lambda_{\max} \left(\int_{-\infty}^{\infty} T(i\omega) T^*(i\omega) d\omega \right)$$

注意到当 z 是标量时, 上式的右端恰好是系统传递函数 H_2 范数。因此, Γ_{cp} 也称为系统 (3.1.1) 的广义 H_2 范数。

3.1.3 H_∞ 性能

考虑系统 (3.1.1), 其传递函数是 $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 。 $T(s)$ 的 H_∞ 范数定义成

$$\|T(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T(j\omega))$$

即系统频率响应的最大奇异值的峰值。

增益 Γ_{ee} 有一个频率域的解释：它恰好等于传递函数矩阵 $T(s)$ 的 H_∞ 范数，即 $\Gamma_{ee} = \|T(s)\|_\infty$ 。因此，根据定理 3.1.3，系统渐近稳定，且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma$ ，当且仅当存在一个对称正定矩阵 P ，使得矩阵不等式 (3.1.11) 成立。这个结论就是著名的有界实引理。

通过求解优化问题

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

可以得到系统最优 H_∞ 性能分析问题的解。问题 (3.1.18) 的最优值就是系统 (3.1.1) 的最优 H_∞ 性能指标。由于问题 (3.1.18) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解。

例 3.1.1 考虑一个二阶系统

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

其中： ω 是自然频率， ζ 是阻尼因子。该系统的一个状态空间实现是

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2\zeta\omega & -\omega^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & k & 0 \end{array} \right]$$

考虑以下两种情况：

$$G_1(s): \zeta = 0.1, \omega = 1, k = 1$$

$$G_2(s): \zeta = 1, \omega = 3, k = 20$$

通过分别求解相关的 Lyapunov 方程 (3.1.2) 和 (3.1.7)，可以得到系统的增益 Γ_{ie} 和 Γ_{ep} ，应用求解器 mincx 求解优化问题 (3.1.18) 可以得到增益 Γ_{ee} 。相应的结果总结如表 3.1 和表 3.2 所示。

表 3.1 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的系统增益

增益 \ 系统	Γ_{ie}	Γ_{ep}	Γ_{ee}
$G_1(s)$	2.500	2.500	5.026
$G_2(s)$	3.703	3.703	2.222

注意到对单输入单输出系统，系统的 IE 增益和 EP 增益是相等的，且它们等于系统传递函数的 H_2 范数，系统的 EE 增益 Γ_{ee} 等于系统的 H_∞ 范数。从表 3.1 可以观察到：和系统 $G_2(s)$ 相比，系统 $G_1(s)$ 有更小的 H_2 范数和更大的 H_∞ 范数。这样一个事实也可以从如下的系统 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的 Bode 图上得到验证。

表 3.2 方程 (3.1.2) 和 (3.1.7)、优化问题 (3.1.18) 的解

解 系统	Y	X	P
$G_1(s)$	$\begin{bmatrix} 2.500 & 0.500 \\ 0.500 & 2.600 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.500 & 0 \\ 0 & 2.500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.005 & 0.101 \\ 0.101 & 1.005 \end{bmatrix}$
$G_2(s)$	$\begin{bmatrix} 3.704 & 22.222 \\ 22.222 & 166.667 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0833 & 0 \\ 0 & 0.0093 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13.334 & 19.985 \\ 19.985 & 120.007 \end{bmatrix}$

为了画系统 $G_1(s)$ 的 Bode 图, 首先给出系统的描述:

```
sysG1=ltisys([-0.2 -1;1 0],[1;0],[0 1],0);
```

进而输入命令:

```
subplot(sysG1,'bo')
```

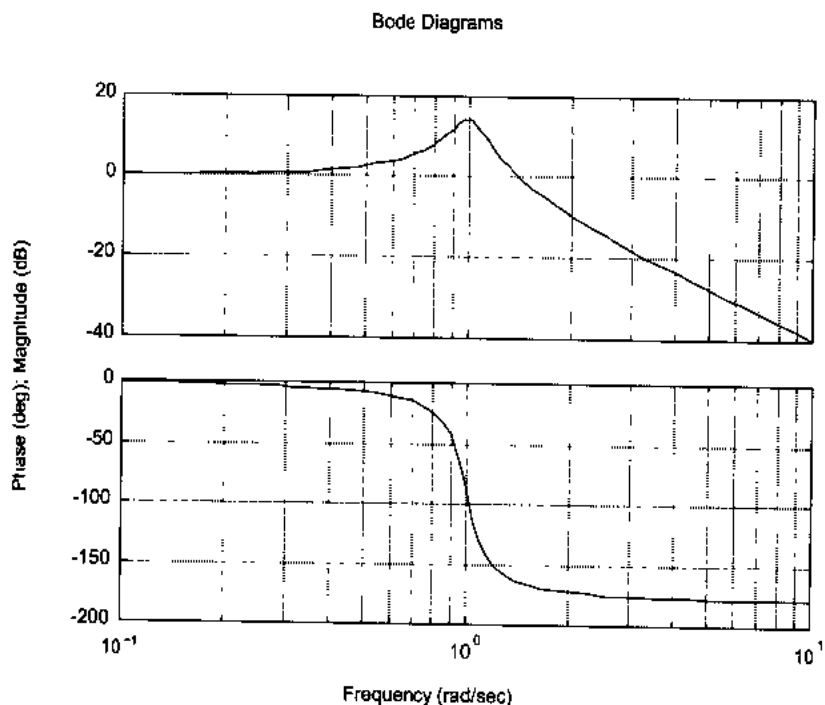
可以得到系统 $G_1(s)$ 的 Bode 图 (如图 3.1 所示)。

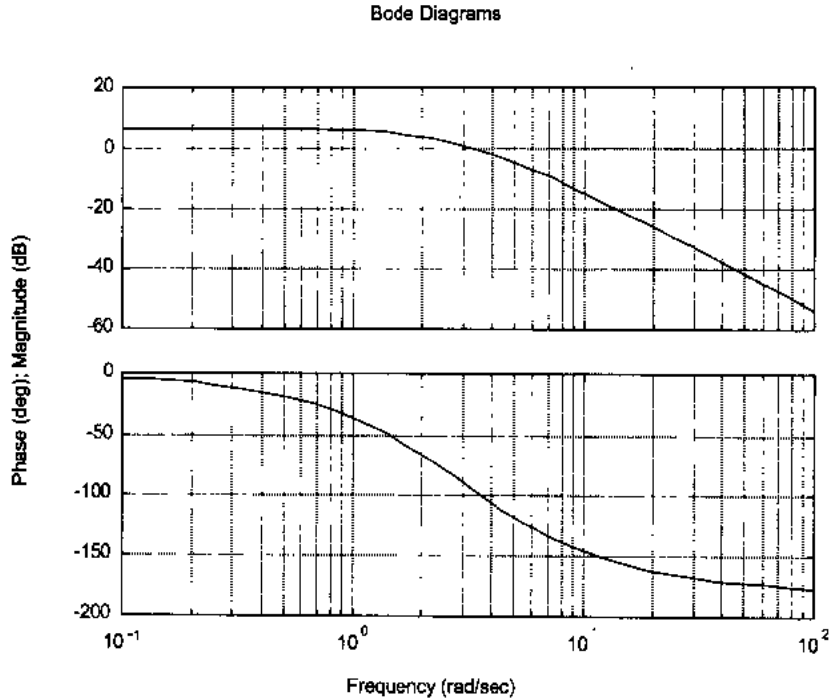
类似地, 通过

```
sysG2=ltisys([-6 -9;1 0],[1;0],[0 20],0);
```

```
subplot(sysG2,'bo')
```

可以得到系统 $G_2(s)$ 的 Bode 图 (如图 3.2 所示)。

图 3.1 系统 $G_1(s)$ 的 Bode 图

图 3.2 系统 $G_2(s)$ 的 Bode 图

系统的 H_∞ 范数对应于 Bode 图中幅值曲线的峰值，而系统的 H_2 范数则对应于 Bode 图中幅值曲线下方的面积。系统 $G_1(s)$ 有更小的阻尼，因此，它的幅值曲线上有一个尖峰，从而导致一个更大的系统增益 Γ_∞ 。

3.2 离散时间系统

考虑线性时不变的离散时间系统：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

其中： $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态， $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^q$ 是外部扰动输入， $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^r$ 是关心的系统被调输出。本节的目的就是给出一些类似连续时间系统的系统性能指标及其计算方法。为此，首先引进度量离散时间信号（或序列）大小的一些方法。

平方和信号 f 的大小可以用 L_2 范数来度量：

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f(k)\|^2 \right)^{1/2}$$

幅值有界信号 f 的大小可以用 L_∞ 范数来度量：

$$\|f\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \|f(k)\|$$

脉冲信号 $f(k) = f_0 \delta(k)$ 的大小可以用向量 f_0 的范数 $\|f_0\|$ 来衡量, 其中 $\delta(\cdot)$ 是 Kronecker 的 delta 函数: $\delta(0)=1$, 对所有的 $k \neq 0$, $\delta(k)=0$ 。

可以用如上衡量信号大小的范数来定义离散时间系统 (3.2.1) 的一些系统性能指标:

- IE (Impulse-to-Energy) 增益: $\Lambda_{ie} = \sup_{\substack{w(k)=w_0\delta(k) \\ \|w_0\| \leq 1}} \|z\|_2$;
- EP (Energy-to-Peak) 增益: $\Lambda_{ep} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_\infty$;
- EE (Energy-to-Energy) 增益: $\Lambda_{ee} = \sup_{\|w\|_2 \leq 1} \|z\|_2$ 。

以下用一些代数条件来刻画这些系统增益的存在条件和计算方法。

定理 3.2.1 若系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 则系统的 IE 增益 $\Lambda_{ie} = \|B^T Y B + D^T D\|^{1/2}$,

其中矩阵 Y 是矩阵方程

$$Y = A^T Y A + C^T C \quad (3.2.2)$$

的解。 Λ_{ie} 也可以由下式得到

$$\Lambda_{ie} = \inf_P \left\{ \|B^T P B + D^T D\|^{1/2} : P > A^T P A + C^T C \right\} \quad (3.2.3)$$

证明 由线性系统的知识可知, 状态方程 (3.2.1) 的状态可由下式确定:

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B w(i)$$

在零初始状态下, 对脉冲扰动 $w(k) = w_0 \delta(k)$, 系统的输出是

$$z(k) = \begin{cases} D w_0 & k=0 \\ C A^{k-1} B w_0 & k \geq 1 \end{cases}$$

该输出信号的 L_2 范数是

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= w_0^T D^T D w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} w_0^T B^T (A^T)^{k-1} C^T C A^{k-1} B w_0 \\ &= w_0^T (B^T Y B + D^T D) w_0 \end{aligned}$$

其中的 $Y = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k$ 。由于系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 故这样的矩阵 Y 是有定义的, 且满足 Lyapunov 方程 (3.2.2)。根据以上的关系式, 类似于定理 3.1.1 的证明即可得到所需要的结论。即定理得证。

根据定理 3.2.1, 如果以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & A^T P A + C^T C - P < 0 \\ & B^T P B + D^T D \leq \gamma I \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

有一个最优值 γ^* , 则 $\Lambda_{ic} = \sqrt{\gamma^*}$ 。而优化问题 (3.2.4) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求解该问题的全局最优解。

定理 3.2.2 若系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 则 $\Lambda_{cp} = \|CXC^T + DD^T\|^{1/2}$, 其中矩阵 X 是 Lyapunov 方程

$$X = AXA^T + BB^T \quad (3.2.5)$$

的解。 Λ_{cp} 也可以由下式得到

$$\Lambda_{cp} = \inf_Q \left\{ \|CQC^T + DD^T\|^{1/2} : Q > AQA^T + BB^T \right\} \quad (3.2.6)$$

证明 考虑 (3.2.6) 式中的 Lyapunov 不等式, 由于系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 因此该 Lyapunov 矩阵不等式存在对称正定解 $Q > 0$ 。为了建立 $\|z\|_\infty^2$ 和 $\|w\|_2^2$ 之间的关系, 考虑

$$\begin{aligned} & x^T(k)Q^{-1}x(k) - x^T(k+1)Q^{-1}x(k+1) + \|w(k)\|^2 \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

而矩阵不等式 $Q > AQA^T + BB^T$ 可以等价地写成

$$Q - \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} > 0$$

应用矩阵的 Schur 补性质, 上式又等价于

$$\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^T \\ B^T \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} > 0$$

利用这个矩阵不等式, 从 (3.2.7) 式可得

$$x^T(k)Q^{-1}x(k) - x^T(k+1)Q^{-1}x(k+1) + \|w(k)\|^2 \geq 0$$

对上式中的 k 从 0 到 $n-1$ 求和并利用系统的零初始状态条件, 得到

$$x^T(n)Q^{-1}x(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|w(k)\|^2$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \|w(k)\|^2 & x^T(n) \\ x(n) & Q \end{bmatrix} \geq 0$$

由此可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \|w(k)\|^2 & x^T(n) \\ x(n) & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^T(n) \\ w(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T \\ D \end{bmatrix} \geq 0$$

即

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^n \|w(k)\|^2 & z^T(n) \\ z(n) & CQC^T + DD^T \end{bmatrix} \geq 0$$

再一次应用矩阵的 Schur 补性质, 从上式可得

$$z(n)z^T(n) \leq \left(\sum_{k=0}^n \|w(k)\|^2 \right) (CQC^T + DD^T) \leq \|w\|_2^2 \|CQC^T + DD^T\| I$$

因此, 对所有的 $n \geq 1$ 和满足 (3.2.6) 式中 Lyapunov 矩阵不等式的矩阵 Q , 有

$$\|z(n)\|^2 \leq \|w\|_2^2 \|CQC^T + DD^T\|$$

而当 $n=0$ 时,

$$\|z(0)\|^2 = w^T(0)D^T D w(0) \leq \|DD^T\| \|w(0)\|^2 \leq \|w\|_2^2 \|CQC^T + DD^T\|$$

根据 Λ_∞ 的定义, 我们证明了

$$\Lambda_\infty \leq \inf_Q \left\{ \|CQC^T + DD^T\|^{1/2} : Q > AQA^T + BB^T \right\} = \|CXC^T + DD^T\|^{1/2}$$

其中的矩阵 X 是 Lyapunov 方程 (3.2.5) 的解。以上关系式中的最后一个等号类似于 3.1 节中定理 3.1.1 的证明得到。

为了证明定理的结论, 还需要证明 $\Lambda_\infty \geq \|CXC^T + DD^T\|^{1/2}$ 。通过类似于证明定理 3.2.1 的思想, 选取一个适当的单位能量扰动信号 $w(k)$, 使得系统的输出 $z(k)$ 满足 $\|z\|_\infty^2 \geq \|CXC^T + DD^T\|$ 来证明这个不等式。考虑

$$w_n(k) = \begin{cases} \lambda_n^{-1/2} B^T (A^T)^{n-k} C^T 0_n & k = 0, 1, \dots, n \\ \lambda_n^{-1/2} D^T f_n & k = n+1 \\ 0 & k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (3.2.8)$$

其中: f_n 是对应于矩阵 $CX_n C^T + DD^T$ 最大特征值 λ_n 的特征向量, $X_n = \sum_{k=0}^n A^k B B^T (A^T)^k$ 。

对任意固定的整数 $n \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \|w_n\|_2^2 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{\lambda_n} f_n^T C A^{n-k} B B^T (A^T)^{n-k} C^T f_n + \frac{1}{\lambda_n} f_n^T D D^T f_n \\ &= \frac{1}{\lambda_n} f_n^T (C X_n C^T + D D^T) f_n = 1 \end{aligned}$$

对于这样一个单位能量扰动输入, 系统在 $k=n+1$ 时的输出信号 $z_n(k)$ 是

$$\begin{aligned} z_n(n+1) &= C \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} B (\lambda_n^{-1/2} B^T (A^T)^{n-k} C^T f_n) \right) + D (\lambda_n^{-1/2} D^T f_n) \\ &= \lambda_n^{-1/2} (C X_n C^T + D D^T) f_n \end{aligned}$$

因此,

$$\|z_n(n+1)\|^2 = \frac{1}{\lambda_n} f_n^T (CX_n C^T + DD^T)^2 f_n = \lambda_n$$

等号两边取极限, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n(n+1)\|^2 = \|CXC^T + DD^T\|$$

这样就建立了 $\Lambda_{\text{ep}} \geq \|CXC^T + DD^T\|^{1/2}$ 。结合前面得到的相反不等式, 定理得证。

类似于问题 (3.2.4), 可以建立以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & AQA^T + BB^T - Q < 0 \\ & CQC^T + DD^T \leq \gamma I \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

如果该问题有一个最优值 γ^* , 则 $\Lambda_{\text{ep}} = \sqrt{\gamma^*}$ 。而优化问题 (3.2.9) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题的全局最优解。

定理 3.2.3 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和系统 (3.2.1), 以下条件 is 等价的。

- (i) 系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 且系统的 EE 增益 $\Lambda_{\infty} < \gamma$;
- (ii) 存在一个对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

证明 在此只证明 (ii) \Rightarrow (i)。若存在对称矩阵 $P > 0$, 使得线性矩阵不等式 (3.2.10) 成立, 由于这个矩阵不等式严格成立, 故总是存在适当的常数 ε , $0 < \varepsilon < 1$, 使得

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)\gamma^2 I \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

由不等式 (3.2.10) 也可以得到 $P > A^T P A$ 。因此, 系统 (3.2.1) 是渐近稳定的, 且

$$V(k) = x^T(k) P x(k)$$

是系统 (3.2.1) 的一个 Lyapunov 函数。为了证明 $\gamma^2 \|w\|_2^2$ 是 $\|z\|_2^2$ 的一个上界, 考虑

$$J_k = \|z(k)\|^2 - (1-\varepsilon)\gamma^2 \|w(k)\|^2$$

并定义 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$, 则

$$\begin{aligned} J_k &= [\|z(k)\|^2 - (1-\varepsilon)\gamma^2 \|w(k)\|^2 + \Delta V(k)] - \Delta V(k) \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} - \Delta V(k) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)\gamma^2 I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} - \Delta V(k)$$

根据不等式 (3.2.11), 得到 $J_k < -\Delta V(k)$, 即

$$\|z(k)\|^2 < (1-\varepsilon)\gamma^2 \|w(k)\|^2 - \Delta V(k)$$

在以上不等式两端从 $k=0$ 到 $k=n$ 求和, 并利用零初始条件和扰动信号 w 是能量有限的性质, 可得:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \|z(k)\|^2 &< (1-\varepsilon)\gamma^2 \sum_{k=0}^n \|w(k)\|^2 - V(n+1) \\ &\leq (1-\varepsilon)\gamma^2 \|w\|_2^2 - V(n+1) \end{aligned}$$

上式对所有的 n 均成立。令 $n \rightarrow \infty$, 并利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0$, 我们得到

$$\|z\|_2^2 \leq (1-\varepsilon)\gamma^2 \|w\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$$

由此定义即得 $\Lambda_{ee} < \gamma$ 。即定理得证。

和连续时间系统一样, 离散时间系统的 EE 增益 Λ_{ee} 也有一个频域的解釋:

$$\Lambda_{ee} = \|G(z)\|_{\infty} = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|G(e^{j\theta})\|$$

其中的 $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ 是系统的传递函数矩阵。 $\|G(z)\|_{\infty}$ 称为离散时间传递函数 $G(z)$ 的 H_{∞} 范数。对给定的标量 $\gamma > 0$, 如果 $\|G(z)\|_{\infty} < \gamma$, 则称系统 (3.2.1) 具有 H_{∞} 性能 γ 。

定理 3.2.3 给出了系统 (3.2.1) 具有 H_{∞} 性能 γ 的一个刻画。进一步, 根据矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (3.2.10) 等价于

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.2.12)$$

矩阵不等式 (3.2.12) 是一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来判断该线性矩阵不等式的可行性, 进而可得系统 (3.2.1) 是否具有 H_{∞} 性能 γ 的结论。通过在线性矩阵不等式 (3.2.12) 约束下对 γ 最小值的搜索, 可以得到一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求得该问题的最小值 γ^* , 这样一个值 γ^* 称为系统 (3.2.1) 的最优 H_{∞} 性能指标。事实上, 这个正好是系统增益 Λ_{ee} 。

例 3.2.1 考虑一个稳定的连续时间系统, 其中:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

取采样周期 $T = 0.5$, 并通过使用零阶保持器可以将所考虑的连续系统离散化, 得到的离

散系统模型的状态和控制矩阵分别是：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9048 & 0 \\ 0.0861 & 0.8187 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.0952 & 0 \\ 0.0045 & 0.1813 \end{bmatrix}$$

输出方程中的系数矩阵 \mathbf{C} 和 \mathbf{D} 分别取 $\mathbf{C} = \mathbf{I}_2$ 和 $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ 。

对于这个离散系统，通过求解 Lyapunov 方程 (3.2.5) 可以得到一个对称正定解

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.2449 & 0.0848 \\ 0.0848 & 0.5024 \end{bmatrix}$$

根据定理 3.2.2，可以得到系统增益 $\Lambda_{\text{ep}} \approx 0.7265$ 。这个离散系统的 H_2 范数是 0.8645。由于该系统有两个输出，不是单输入单输出系统，因此，其 H_2 范数不等于系统增益 Λ_{ep} 。

第4章 控制系统综合

第3章引进了系统的一些性能指标，特别是给出了系统 H_2 和 H_∞ 性能指标的意义和基于线性矩阵不等式的刻画。本章将基于第3章给出的系统性能分析结果，讨论使得闭环系统具有这些性能的控制器的设计方法。

4.1 H_∞ 控制

针对如图4.1所示的广义系统：

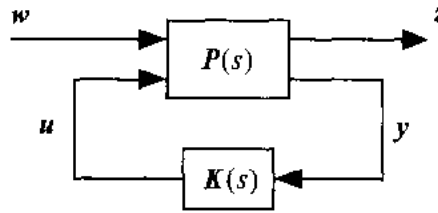


图4.1 广义系统

$P(s)$ 是一个线性时不变系统，由以下的状态空间描述：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

其中： $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量， $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入， $y \in \mathbb{R}^p$ 是测量输出， $z \in \mathbb{R}^r$ 是被调输出， $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动，这里考虑的外部扰动是不确定的，但具有有限能量，即 $w \in L_2$ ， $K(s)$ 是一个控制器的传递函数。

本节的目的是设计一个控制器 $u(s) = K(s)y(s)$ ，使得闭环系统满足以下的性质：

- 闭环系统是内部稳定的，即闭环系统状态矩阵的所有特征值均在左半开复平面中；
- 从扰动输入 w 到被调输出 z 的闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数小于1，即

$$\|T_{wz}(s)\|_\infty < 1\tag{4.1.2}$$

具有这样性质的控制器 $u(s) = K(s)y(s)$ 称为系统 (4.1.1) 的一个 H_∞ 控制器。

通过将系统模型中的系数矩阵分别乘以一个适当的常数，可以使得闭环系统具有给定 H_∞ 性能 γ ，即使得 $\|T_{wz}(s)\|_\infty < \gamma$ 的 H_∞ 控制问题转化为使得 $\|T_{wz}(s)\|_\infty < 1$ 的标准 H_∞ 控制问

题。具有给定 H_∞ 性能 γ 的 H_∞ 控制器称为系统 (4.1.1) 的 γ -次优 H_∞ 控制器。进一步, 通过对 γ 的搜索, 可以求取使得闭环系统的扰动抑制度 γ 最小化的控制器, 这样的控制问题称为系统 (4.1.1) 的最优 H_∞ 控制问题, 由最优 H_∞ 控制问题得到的 H_∞ 控制器称为系统的最优 H_∞ 控制器。

对于 H_∞ 控制问题, 存在许多种求解的方法, 从最初复杂的算子方法, 到 Riccati 方程处理方法。这里, 将主要介绍基于线性矩阵不等式的 H_∞ 控制问题求解方法。这一方法的好处在于可以用相对直接的矩阵运算来得到控制器的设计方法; 对系统模型无须过多的限制条件; 如果系统存在 H_∞ 控制器, 还可以得到所有 H_∞ 控制器的一个参数化凸约束刻画, 基于这样一个参数化刻画, 可以结合其他的凸约束, 通过求解一个凸优化问题来解决具有 H_∞ 范数约束的多目标控制问题。

本节将分别针对状态反馈和输出反馈这两种情况来讨论系统的 H_∞ 控制器设计问题。

4.1.1 状态反馈 H_∞ 控制

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 要求设计一个静态状态反馈控制器

$$u = Kx \quad (4.1.3)$$

使得相应的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z &= (C_1 + D_{12} K)x + D_{11} w \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

是渐近稳定的, 且闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 满足

$$\|T_{wz}(s)\|_\infty = \|(C_1 + D_{12} K)[sI - (A + B_2 K)]^{-1} B_1 + D_{11}\|_\infty < 1 \quad (4.1.5)$$

具有这样性质的控制律 (4.1.3) 称为系统 (4.1.1) 的一个状态反馈 H_∞ 控制律。

根据定理 3.1.3, 可以得到状态反馈 H_∞ 控制律的存在条件和设计方法。

定理 4.1.1 对系统 (4.1.1), 存在一个状态反馈 H_∞ 控制器, 当且仅当存在一个对称正定矩阵 X 和矩阵 W , 使得以下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T & B_1 & (C_1 X + D_{12} W)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 X + D_{12} W & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.6)$$

成立。进而, 如果矩阵不等式 (4.1.6) 存在一个可行解 X^*, W^* , 则 $u = W^*(X^*)^{-1}x$ 是系统 (4.1.1) 的一个状态反馈 H_∞ 控制器。

证明 根据定理 3.1.3, 闭环系统 (4.1.4) 是渐近稳定的, 且满足性能条件 (4.1.5), 当且仅当存在一个对称正定矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 K)^T P + P(A + B_2 K) & PB_1 & (C_1 + D_{12} K)^T \\ B_1^T P & -I & D_{11}^T \\ C_1 + D_{12} K & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.7)$$

上式中存在两个未知矩阵变量 K 和 P ，而且这两个矩阵变量是以非线性的形式出现在这个矩阵不等式中的，因此，要直接从以上矩阵不等式中求解 K 和 P 是很困难的。然而，可以通过一个适当的变量替换，将非线性矩阵不等式 (4.1.7) 转化为一个等价的关于新变量的线性矩阵不等式，从而可以应用求解线性矩阵不等式的有效工具来求解这组新变量，进而得到 K 和 P 的值。这样一种处理方法称为变量替换法，现已在许多控制系统综合问题中得到了广泛的应用。

对不等式 (4.1.7) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I\}$ ，可得矩阵不等式 (4.1.7) 等价于：

$$\begin{bmatrix} AP^{-1} + B_2 KP^{-1} + (AP^{-1} + B_2 KP^{-1})^T & B_1 & (C_1 P^{-1} + D_{12} KP^{-1})^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 P^{-1} + D_{12} KP^{-1} & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0$$

定义 $X = P^{-1}$ 和 $W = KX$ ，则从上式即可得到矩阵不等式 (4.1.6)。定理得证。

矩阵不等式 (4.1.6) 是矩阵变量 X 、 W 的一个线性矩阵不等式，因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式。进而，如果该线性矩阵不等式有可行解，则可以利用求解器 `feasp` 所提供的可行解，根据定理 4.1.1 来构造系统 (4.1.1) 的一个状态反馈 H_∞ 控制器。事实上，由于线性矩阵不等式 (4.1.6) 提供了关于 X 、 W 的一个凸约束，因此，定理 4.1.1 通过 (4.1.6) 给出了系统 (4.1.1) 的所有状态反馈 H_∞ 控制律的一个凸约束刻画。

对给定的标量 $\gamma > 0$ ，为求系统的状态反馈 γ -次优 H_∞ 控制器，考虑到

$$\|T_{wz}(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \|\gamma^{-1}T_{wz}(s)\|_\infty < 1$$

故可以通过用 $\gamma^{-1}C_1$ 、 $\gamma^{-1}D_{11}$ 和 $\gamma^{-1}D_{12}$ 来代替模型 (4.1.1) 中的矩阵 C_1 、 D_{11} 和 D_{12} ，对得到的新系统模型设计标准 H_∞ 控制器来得到所求的状态反馈 γ -次优 H_∞ 控制器。此时，相应的矩阵不等式 (4.1.6) 为：

$$\begin{bmatrix} AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T & B_1 & \gamma^{-1}(C_1 X + D_{12} W)^T \\ B_1^T & -I & \gamma^{-1}D_{11}^T \\ \gamma^{-1}(C_1 X + D_{12} W) & \gamma^{-1}D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0$$

在上式两边分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, I, \gamma I\}$ ，可得与上式等价的矩阵不等式：

$$\begin{bmatrix} AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T & B_1 & (C_1 X + D_{12} W)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 X + D_{12} W & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.8)$$

因此，根据定理 4.1.1，通过求解以上的线性矩阵不等式可以得到系统 (4.1.1) 的状态反馈 γ -次优 H_∞ 控制器。

进一步，基于状态反馈 γ -次优 H_∞ 控制器的存在条件 (4.1.8)，通过建立和求解以下的优化问题：

$$\begin{aligned}
 & \min \rho \\
 & \text{s.t.} \begin{bmatrix} AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T & B_1 & (C_1 X + D_{12} W)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 X + D_{12} W & D_{11} & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \\
 & X > 0
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

如果该优化问题有解, 则结合定理 4.1.1, 利用该优化问题的最优解可以得到系统 (4.1.1) 的最优 H_∞ 控制器, 相应的最小扰动抑制度是 $\sqrt{\rho}$ 。

问题 (4.1.9) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题, 故可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该优化问题。

4.1.2 输出反馈 H_∞ 控制

在许多实际问题中, 系统的状态往往是不能直接测量的, 故难以应用状态反馈控制律来对系统进行控制。有时即使系统的状态可以直接测量, 但考虑到实施控制的成本和系统的可靠性等因素, 如果可以用系统的输出反馈来达到闭环系统的性能要求, 则更适合于选择输出反馈的控制方式。因此, 输出反馈 H_∞ 控制问题的研究更具有实际意义。

在本小节的讨论中, 我们做以下的假定:

(A1) (A, B_2, C_2) 是能稳能检测的;

(A2) $D_{22} = 0$ 。

条件 (A1) 对系统 (4.1.1) 的输出反馈镇定是充分必要的, 而条件 (A2) 的假定并不失一般性, 因为一般系统的 H_∞ 控制问题可以转化成这样一种特殊的情况。

本小节的目的是设计一个具有以下状态空间实现的输出反馈 H_∞ 控制器 $u = K(s)y$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= A_K \hat{x} + B_K y \\
 u &= C_K \hat{x} + D_K y
 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

其中: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ 是控制器的状态, A_K 、 B_K 、 C_K 、 D_K 是待确定的控制器参数矩阵。

将控制器 (4.1.10) 应用到系统 (4.1.1) 后得到的闭环系统是

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= A_{cl} \xi + B_{cl} w \\
 z &= C_{cl} \xi + D_{cl} w
 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}, A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix}, B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{bmatrix} \\
 C_{cl} &= [C_1 + D_{12} D_K C_2 \quad D_{12} C_K], D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_K D_{21}
 \end{aligned}$$

根据定理 3.1.3, 控制器 (4.1.10) 是系统 (4.1.1) 的一个 H_∞ 控制器, 即闭环系统 (4.1.11) 是渐近稳定的, 且从 w 到 z 的传递函数的 H_∞ 范数小于 1 的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X_{cl} , 使得

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.12)$$

以下将基于这个 H_∞ 控制器的存在条件来研究形如 (4.1.10) 的输出反馈 H_∞ 控制器设计方法。由于 A_{cl} 、 B_{cl} 、 C_{cl} 和 D_{cl} 依赖于未知的控制器参数，因此在矩阵不等式 (4.1.12) 中，矩阵变量 X_{cl} 和控制器参数矩阵 A_K 、 B_K 、 C_K 、 D_K 以非线性的方式出现，难以简单地直接应用状态反馈控制情形中的变量替换方法来处理，这给输出反馈 H_∞ 控制器的设计带来了极大的困难。

下面将介绍两种基于线性矩阵不等式处理的输出反馈 H_∞ 控制器设计方法——消元法和变量替代法。

1. 消元法

基于定理 2.4.1，可以导出一个通过求解一组线性矩阵不等式可行性问题的输出反馈 H_∞ 控制器设计方法。为此，首先需要将不等式 (4.1.12) 表示成矩阵不等式 (2.4.4) 的形式。定义矩阵

$$K = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}$$

这个矩阵将控制器中的待定参数矩阵集中在一起，这也是输出反馈 H_∞ 控制器设计问题中最终要确定的矩阵。引进矩阵

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_0 = [C_1 \quad 0] \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_{12} = [0 \quad D_{12}], \bar{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这些矩阵可由系统模型 (4.1.1) 中的系数矩阵确定。则闭环系统中的各个系数矩阵可以表示成：

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + \bar{B} K \bar{C}, & B_{cl} &= B_0 + \bar{B} K \bar{D}_{21} \\ C_{cl} &= C_0 + \bar{D}_{12} K \bar{C}, & D_{cl} &= D_{11} + \bar{D}_{12} K \bar{D}_{21} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

显然，这些闭环系统的系数矩阵都表示成了控制器参数矩阵 K 的仿射函数。

将表达式 (4.1.13) 代入到不等式 (4.1.12) 中，得到

$$\begin{bmatrix} (A_0 + \bar{B} K \bar{C})^T X_{cl} + X_{cl} (A_0 + \bar{B} K \bar{C}) & X_{cl} (B_0 + \bar{B} K \bar{D}_{21}) & (C_0 + \bar{D}_{12} K \bar{C})^T \\ (B_0 + \bar{B} K \bar{D}_{21})^T X_{cl} & -I & (D_{11} + \bar{D}_{12} K \bar{D}_{21})^T \\ C_0 + \bar{D}_{12} K \bar{C} & D_{11} + \bar{D}_{12} K \bar{D}_{21} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.14)$$

定义矩阵

$$H_{X_{cl}} = \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -I \end{bmatrix}$$

则矩阵不等式 (4.1.14) 可以表示成

$$H_{X_{cl}} + \begin{bmatrix} X_{cl} \bar{B} \\ 0 \\ \bar{D}_{12} \end{bmatrix} K [\bar{C} \quad \bar{D}_{21} \quad 0] + [\bar{C} \quad \bar{D}_{21} \quad 0]^T K^T \begin{bmatrix} X_{cl} \bar{B} \\ 0 \\ \bar{D}_{12} \end{bmatrix}^T < 0$$

记

$$P_{X_{cl}} = [\bar{B}^T X_{cl} \quad 0 \quad \bar{D}_{12}^T], \quad Q = [\bar{C} \quad \bar{D}_{21} \quad 0]$$

则矩阵不等式 (4.1.14) 可进一步表示成

$$H_{X_{cl}} + P_{X_{cl}}^T K Q + Q^T K^T P_{X_{cl}} < 0 \quad (4.1.15)$$

因此, 系统 (4.1.1) 的输出反馈 H_∞ 控制器存在问题转化成了一个等价的纯代数问题, 即包含矩阵变量 X_{cl} 和 K 的矩阵不等式 (4.1.15) 的可解性问题。根据定理 2.4.1, 这样一个矩阵不等式是可行的当且仅当

$$N_{P_{X_{cl}}}^T H_{X_{cl}} N_{P_{X_{cl}}} < 0, \quad N_Q^T H_{X_{cl}} N_Q < 0 \quad (4.1.16)$$

其中: $N_{P_{X_{cl}}}$ 和 N_Q 分别是由核空间 $\ker(P_{X_{cl}})$ 和 $\ker(N_Q)$ 中的任意一组基向量作为列向量所构成的矩阵。这样, 具有两个矩阵变量 X_{cl} 和 K 的矩阵不等式 (4.1.15) 的可行性问题转化成了等价的两个只含有一个矩阵变量 X_{cl} 的矩阵不等式的可行性问题, 消去了矩阵变量 K 。这样做的主要思想是通过消去矩阵变量 K , 求只包含矩阵变量 X_{cl} 的矩阵不等式 (4.1.16), 然后将得到的矩阵 X_{cl} 代入到矩阵不等式 (4.1.15) 中, 得到只包含矩阵变量 K 的一个线性矩阵不等式, 从而可以应用求解线性矩阵不等式的方法来得到矩阵 K 的解, 即得到所求的控制器。

在 (4.1.16) 式的第 1 个矩阵不等式中, 矩阵变量 X_{cl} 不仅出现在 $H_{X_{cl}}$ 中, 也出现在 $N_{P_{X_{cl}}}$ 中。因此, (4.1.16) 式中的第一个不等式并不是一个线性矩阵不等式, 从而难以直接应用求解线性矩阵不等式的方法来求解该矩阵不等式。以下的工作就是要将这样一个非线性矩阵不等式设法转化成一个等价的线性矩阵不等式。为此, 对给定的 X_{cl} , 定义矩阵

$$T_{X_{cl}} = \begin{bmatrix} A_0 X_{cl}^{-1} + X_{cl}^{-1} A_0^T & B_0 & X_{cl}^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -I & D_{11}^T \\ C_0 X_{cl}^{-1} & D_{11} & -I \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

和只依赖系统状态模型参数的矩阵

$$P = [\bar{B}^T \quad 0 \quad \bar{D}_{12}^T] \quad (4.1.18)$$

引理 4.1.1 假定 $X_{cl} > 0$, 则

$$N_{P_{X_{cl}}}^T H_{X_{cl}} N_{P_{X_{cl}}} < 0 \Leftrightarrow N_P^T T_{X_{cl}} N_P < 0$$

证明 注意到 $P_{X_{cl}} = PS$, 其中

$$S = \begin{bmatrix} X_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

则 $\ker(P_{X_{cl}}) = S^{-1} \ker(P)$ 。

进一步结合 $N_{P_{X_{cl}}}$ 和 N_P 的定义, 得到 $N_{P_{X_{cl}}} = S^{-1} N_P$ 。最后, 由

$$N_{P_{X_{cl}}}^T H_{X_{cl}} N_{P_{X_{cl}}} < 0 \Leftrightarrow N_P^T (S^{-1})^T H_{X_{cl}} S^{-1} N_P < 0$$

及 $(S^{-1})^T H_{X_{cl}} S^{-1} = T_{X_{cl}}$, 即可得到引理的结论。

根据以上的讨论知道: 系统 (4.1.1) 存在 n_K 阶输出反馈 H_∞ 控制器, 当且仅当存在一个对称矩阵 $X_{cl} > 0$, 使得

$$N_P^T T_{X_{cl}} N_P < 0, \quad N_Q^T H_{X_{cl}} N_Q < 0 \quad (4.1.19)$$

这两个不等式中的第一个是矩阵变量 X_{cl}^{-1} 的线性矩阵不等式, 而第二个则是 X_{cl} 的线性矩阵不等式。因此, 要检验同时满足 (4.1.19) 式中两个矩阵不等式的对称正定矩阵 X_{cl} 的存在问题就成为一个困难的非凸优化问题。以下通过设法将这个不等式系统转化成一个线性矩阵不等式系统的方法来克服这一困难。

由于矩阵 X_{cl} 是一个 $(n+n_K) \times (n+n_K)$ 维的实对称矩阵, 其中 n 和 n_K 分别是系统模型和控制器的阶数, 可以将矩阵 X_{cl} 和 X_{cl}^{-1} 做如下的分解:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}, \quad X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix} \quad (4.1.20)$$

其中: X 和 Y 均是 $n \times n$ 维的实对称矩阵。以下将证明 (4.1.19) 式中的不等式只是对子矩阵 X 和 Y 具有约束作用。

引理 4.1.2 设 X_{cl} 是一个 $(n+n_K) \times (n+n_K)$ 维的对称正定矩阵, X 和 Y 是由 (4.1.20) 式所确定的 $n \times n$ 维对称矩阵, 则

$$N_P^T T_{X_{cl}} N_P < 0 \quad \text{和} \quad N_Q^T H_{X_{cl}} N_Q < 0$$

成立当且仅当以下两个矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -I & D_{11} \\ B_1^T C_1 & D_{11}^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.21)$$

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -I & D_{11} \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.22)$$

其中: N_o 和 N_c 分别是以空间 $\ker([C_2 \ D_{21}])$ 和 $\ker([B_2^T \ D_{12}^T])$ 中的任意一组基向量作为列向量所构成的矩阵。

证明 我们只证明矩阵不等式 $N_p^T T_{X_{cl}} N_p < 0$ 等价于矩阵不等式 (4.1.21), 而 $N_o^T H_{X_{cl}} N_o < 0$ 和矩阵不等式 (4.1.22) 的等价性则可以类似地得到。

根据矩阵 X_{cl} 、 A_0 、 B_0 和 C_0 的定义, 可以得到

$$T_{X_{cl}} = \begin{bmatrix} AY + YA^T & AY_2 & B_1 & YC_1^T \\ Y_2^T A^T & 0 & 0 & Y_2^T C_1^T \\ B_1^T & 0 & -I & D_{11}^T \\ C_1 Y & C_1 Y_2 & D_{11} & -I \end{bmatrix}$$

另一方面, 在矩阵 P 的定义中, 代入矩阵 \bar{B}^T 和 \bar{D}_{12}^T 的表示式, 得到

$$P = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ B_2^T & 0 & 0 & D_{12}^T \end{bmatrix}$$

因此,

$$N_p = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ V_2 & 0 \end{bmatrix}$$

其中: $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = N_c$ 张成了 $[B_2^T \ D_{12}^T]$ 的核空间。注意到 N_p 的分块矩阵中的第二行完全等于零, 利用分块矩阵的运算可以得到 $N_p^T T_{X_{cl}} N_p < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & I \\ V_2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -I & D_{11} \\ B_1^T C_1 & D_{11}^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & I \\ V_2 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

利用

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & I \\ V_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

即可推出 $N_p^T T_{X_{cl}} N_p < 0$ 等价于线性矩阵不等式 (4.1.21)。引理得证。

至此, 已经证明了系统 (4.1.1) 存在形如 (4.1.10) 的输出反馈 H_∞ 控制器当且仅当存在一个 $(n+n_K) \times (n+n_K)$ 维的对称正定矩阵 X_{cl} , 满足矩阵不等式 (4.1.21) 和 (4.1.22)。而事实上, 后面的两个矩阵不等式分别只涉及 X_{cl} 和 X_{cl}^{-1} 中的子矩阵 X 和 Y , 而且是 X 和 Y 的一个线性矩阵不等式系统。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式系统。如果线性矩阵不等式系统 (4.1.21) ~ (4.1.22) 是可行的, 那么如何从该线性矩阵不等式系统的可行解 X 和 Y 来确定满足 (4.1.20) 式的对称

正定矩阵 X_1 呢? 下面的结论提供了这个问题的一个解。

引理 4.1.3 设 X 和 Y 是 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 中给定的对称正定矩阵, n_K 是一个正整数, 则存在矩阵 $X_2, Y_2 \in \mathbf{R}^{n \times n_K}$ 和对称矩阵 $X_3, Y_3 \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$, 满足

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix}$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0, \text{ 且 } \text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_K \quad (4.1.23)$$

证明 “ \Rightarrow ” 由于

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & Y_2 \\ Y_2^T & Y_3 \end{bmatrix} = I$$

利用矩阵的运算, 可得

$$0 \leq \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & Y_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}$$

由

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (4.1.24)$$

可以推出

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} &= n + \text{rank}(X - Y^{-1}) \\ &= n + \text{rank}(XY - I) \\ &= n + \text{rank}(X_2 Y_2^T) \leq n + n_K \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” 若条件 (4.1.23) 成立, 则结合 (4.1.24) 式可得 $X - Y^{-1} \geq 0$, $\text{rank}(X - Y^{-1}) \leq n_K$ 。因此, 存在一个矩阵 $X_2 \in \mathbf{R}^{n \times n_K}$, 使得

$$X - Y^{-1} = X_2 X_2^T \geq 0$$

由此可得 $X - X_2 X_2^T > 0$ 。由矩阵的 Schur 补性质, 进一步可得

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & I \end{bmatrix} > 0$$

另一方面, 由于

$$\begin{bmatrix} X & X_2 \\ X_2^T & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & -YX_2 \\ -X_2^T Y & X_2^T Y X_2 + I \end{bmatrix}$$

故取 $X_3 = I$ ，即可满足引理结论的要求。引理得证。

这个引理表明了只要线性矩阵不等式系统 (4.1.21) ~ (4.1.22) 是可行的，且其解矩阵 X 和 Y 满足秩条件 (4.1.23)，则总可以从解矩阵 X 和 Y 构造出满足 (4.1.20) 式的矩阵 X_{cl} 。一般情况下，秩条件并不是一个凸约束。由于

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq 2n$$

故如果所要设计的 H_∞ 控制器的阶数 $n_K \geq n$ ，则秩约束条件就自然满足。在这种情况下，从一组线性矩阵不等式的解矩阵就一定可以构造满足 (4.1.20) 式的对称正定矩阵 X_{cl} 。

综合以上的讨论，可以得到基于线性矩阵不等式系统 (4.1.1) 的输出反馈 H_∞ 控制器存在条件和设计方法。总结这个结论可得：

定理 4.1.2 系统 (4.1.1) 存在一个输出反馈 H_∞ 控制器，当且仅当存在对称正定矩阵 X 和 Y ，使得

$$(a) \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$(b) \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -I & D_{11} \\ B_1^T C_1 & D_{11}^T & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$(c) \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

其中： N_o 和 N_c 分别是以子空间 $\ker([C_2 \ D_{21}])$ 和 $\ker([B_2^T \ D_{12}^T])$ 中任意一组基向量作为列向量所构成的矩阵，即满足 $\text{Im } N_o = \ker([C_2 \ D_{21}])$ 和 $\text{Im } N_c = \ker([B_2^T \ D_{12}^T])$ 的矩阵 N_o 和 N_c 。

定理 4.1.2 中的矩阵不等式 (a)、(b) 和 (c) 是矩阵变量 X 、 Y 的一个线性矩阵不等式系统。因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来求解这个线性矩阵不等式系统。

如果核空间 $\ker([C_2 \ D_{21}])$ 和 $\ker([B_2^T \ D_{12}^T])$ 中有任何一个等于零空间，则在定理条件中可以删去相应的线性矩阵不等式。若系统 (4.1.1) 不存在控制输入和测量输出，则可以在系统模型中取 $B_2 = 0$ 、 $C_2 = 0$ 、 $D_{12} = 0$ 、 $D_{21} = 0$ ，因此，相应的 $N_c = I$ 、 $N_o = I$ 。在这种情况下，定理条件中的三个不等式变为：

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.25)$$

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -I & D_{11} \\ B_1^T C_1 & D_{11}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.26)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.1.27)$$

由矩阵的运算性质可以得到：如果 $X > 0$ 满足矩阵不等式 (4.1.25)，则 $Y = X^{-1} > 0$ 满足矩阵不等式 (4.1.26)。因此，不等式系统 (4.1.25) ~ (4.1.27) 等价于：存在对称正定矩阵 X ，使得线性矩阵不等式 (4.1.25) 成立；或等价于存在对称正定矩阵 Y ，使得线性矩阵不等式 (4.1.26) 成立。这样，我们再一次得到了系统 H_∞ 性能的分析结果。

从以上的分析也可以看到矩阵 N_c 和 N_o 分别反映了系统的控制输入不能影响的部分和系统测量输出不能反映的部分。

从定理 4.1.2 的条件可以得到一个阶数为 $n_K \geq n$ 的输出反馈 H_∞ 控制器。事实上，可以得到 n 维的输出反馈 H_∞ 控制器。

如果要求设计阶数 $n_K < n$ 的输出反馈 H_∞ 控制器，则关于其存在的问题，我们有以下的推论。

推论 4.1.1 系统 (4.1.1) 存在阶数 $n_K < n$ 的输出反馈 H_∞ 控制器当且仅当存在对称正定矩阵 X 和 Y ，满足定理 4.1.2 中的条件 (a)、(b)、(c) 以及一个附加条件

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_K$$

由于附加的秩约束条件不是一个凸约束，因此，降阶输出反馈 H_∞ 控制问题的求解计算就要比全阶输出反馈 H_∞ 控制问题的求解计算困难得多。

如果系统的状态都是可以测量得到的，即在系统模型 (4.1.1) 中， $C_2 = I$ 、 $D_{21} = 0$ 、 $D_{22} = 0$ ，则相应的 $N_o = [0 \ I]^T$ ，定理 4.1.2 中的不等式 (a) 变成了

$$\begin{bmatrix} -I & D_{11}^T \\ D_{11} & -I \end{bmatrix} < 0$$

因此，只要不等式 (b) 有对称正定矩阵解 Y ，则不等式 (a) 对任意的正定矩阵 X 都是可行的。特别地，取 $X = Y^{-1}$ ，可得不等式 (c) 也是可行的。对这样的一对解矩阵 X 和 Y ，由于

$$\text{rank} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = n$$

故根据推论 4.1.1，可以用解矩阵 X 和 Y 构造一个静态的 H_∞ 状态反馈控制器。进一步，还可以得到：

推论 4.1.2 对系统 (4.1.1)，假定所有的系统状态都是可以测量得到的，即 $C_2 = I$ 、 $D_{21} = 0$ 、 $D_{22} = 0$ ，若系统 (4.1.1) 存在一个 H_∞ 控制器 (4.1.10) (可能是动态

反馈控制器), 则一定存在一个静态的 H_∞ 状态反馈控制器。

推论 4.1.2 表明了: 在状态反馈情况下, 闭环系统的 H_∞ 性能并不能通过增加控制器的阶数来加以改进。因此, 系统的 H_∞ 状态反馈控制器总是能够选择为一个静态控制律。

根据以上得到的 H_∞ 控制器存在条件, 可以按以下的步骤设计所需要的输出反馈 H_∞ 控制器。

Step 1: 求取满足定理 4.1.2 条件的矩阵 X 和 Y ;

Step 2: 求满足 $X - Y^{-1} = X_2 X_2^T$ 的矩阵 $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n_K}$, 其中的 n_K 可以选成是矩阵 $X - Y^{-1}$ 的秩。可以采用奇异值分解的方法得到这样的矩阵 X_2 。用矩阵 X 和 X_2 构造

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} X & X_2^T \\ X_2 & I \end{bmatrix}$$

Step 3: 将得到的矩阵 X_{cl} 代入到矩阵不等式

$$H_{X_{cl}} + P_{X_{cl}}^T K Q + Q^T K^T P_{X_{cl}} < 0$$

中, 就会得到只包含矩阵变量 K 的一个线性矩阵不等式, 从而应用求解线性矩阵不等式的工具可以求出 H_∞ 控制器的参数矩阵 K (注意, 矩阵 X_{cl} 的存在已保证了这个线性矩阵不等式是可行的)。

对于给定的标量 $\gamma > 0$, 根据定理 4.1.2, 通过求解以下的一个线性矩阵不等式系统, 可以得到系统 (4.1.1) 的输出反馈 γ -次优 H_∞ 控制器:

$$(aa) \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T X + X A & X B_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$(bb) \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A Y + Y A^T & Y C_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$(cc) \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

进一步, 基于以上的三个线性矩阵不等式, 通过应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx, 可以求出系统 (4.1.1) 的输出反馈最优 H_∞ 控制器。

根据以上介绍的输出反馈 H_∞ 控制问题的线性矩阵不等式求解方法, LMI 工具箱提供了直接求解系统 (4.1.1) 的 H_∞ 控制问题的函数。

LMI 工具箱提供了基于 Riccati 方程处理方法和线性矩阵不等式处理方法的连续/离散时间系统 H_∞ 控制器综合的工具。在此主要介绍基于线性矩阵不等式处理方法的 H_∞ 控制器综合的工具。

连续时间系统 H_∞ 控制器综合问题的求解器是 hinflmi, 离散时间系统 H_∞ 控制器综合问题的求解器是 dhinflmi。以下通过一个例子来介绍求解器 hinflmi 的使用方法。

例 4.1.1 考虑由以下状态空间模型描述的一阶系统:

$$\dot{x} = w + 2u$$

$$z = x$$

$$y = -x + w$$

首先, 确定系统模型:

```
a=0;b1=1;b2=2;c1=1;d11=0;d12=0;c2=-1;d21=1;d22=0;
P=ltisys(a,[b1 b2],[c1;c2],[d11 d12;d21 d22])
```

为了得到系统的最优 H_∞ 控制器, 输入:

```
gopt=hinfmi(P,[1 1])
```

其中, `hinfmi` 的输入项中的行向量 $[1 \ 1] = [p \ m]$, 其中的分量分别反映了系统测量输出和控制输入的个数。这个函数是通过使用 `mincx` 来优化系统的 H_∞ 性能指标, 得到的结果如下:

Minimization of gamma:

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

```

1          2.196542
***          new lower bound:   -0.571370
2          1.381964
3          1.381964
4          1.094665
5          1.052469
6          1.008499
7          1.008499
8          1.008499
***          new lower bound:    0.656673
9          1.002517
***          new lower bound:    0.878172
10         1.002517
***          new lower bound:    0.982223
11         1.002517
***          new lower bound:    0.993382
```

```
Result: feasible solution of required accuracy
        best objective value:    1.002517
```

```

    guaranteed relative accuracy: 9.11e-003
    f-radius saturation: 0.193% of R = 1.00e+008

```

```

Optimal Hinf performance: 1.002e+000

```

```

gopt =

```

```

    1.0023

```

因此, 系统的最优 H_∞ 性能指标值是 $\gamma_{\text{opt}} = 1.0023$ 。如果需要进一步得到系统的最优 H_∞ 控制器 $K(s)$, 则可以在 `hinflmi` 的输出中增加第 2 个分量:

```

[gopt,K]=hinflmi(P,[1 1])

```

得到:

```

K =

```

```

    1.0e+004 *

```

```

    -9.9613    -0.0608     0.0001
    -5.9118         0         0
         0         0        -Inf

```

这里得到的 K 是 $K(s)$ 的系统矩阵, 控制器 $K(s)$ 的一个状态空间实现 (A_K, B_K, C_K, D_K) 可以用以下函数得到:

```

[Ak,Bk,Ck,Dk]=ltiss(K)

```

如果要求计算满足 H_∞ 性能 $\gamma < 10$ 的一个次优 H_∞ 控制器, 则可以输入:

```

[g,K]=hinflmi(P,[1 1],10)

```

得到:

```

K =

```

```

    -6.3113    -2.0350     1.0000
    -2.2455         0         0
         0         0        -Inf

```

相应的闭环系统 H_∞ 性能指标值是 5.0023。另外,

```

[g,K,x1,x2,y1,y2]=hinflmi(P,[1 1],10)

```

还给出了定理 4.1.2 中线性矩阵不等式 (a) 和 (b) 的解矩阵 $X = y1$ 和 $Y = x1$ 。

在得到了系统的 H_∞ 控制器 K 之后, 可以使用函数 `sft` 得到闭环系统:

```
clsys=sft(P,K)
```

进而, 函数 `spol` 可以用来检验闭环系统的稳定性:

```
spol(clsys)
```

该函数返回的是闭环系统的极点。从外部扰动 w 到被调输出 z 的闭环系统增益 Γ_{∞} (也称为系统的 RMS 增益) 可以通过

```
norminf(clsys)
```

得到。应用函数 `splot` 可以绘制闭环系统 `clsys` 的时间和频率响应曲线。它的一般表示式是:

```
splot(sys,type,xrange)
```

其中: `sys` 是一个系统的矩阵表示; `xrange` 是一个可选择参数, 用来控制图中 x 轴的坐标; `type` 由两个字母组成, 表示所要画的图的类型。可供选择的图形和相应的字母表示如表 4.1 所示。

表 4.1 可供选择的图形和相应的字母表示

频率响应曲线	
type	曲 线
'bo'	Bode plot
'sv'	singular value plot
'ny'	Nyquist plot
'li'	lin-log Nyquist plot
'ni'	Black / Nichols chart
时间响应曲线	
type	曲 线
'st'	step response
'im'	impulse response
'sq'	response to a square signal
'si'	response to a sinusoidal signal

在离散时间系统中, 相应的命令是:

```
splot(sys,T,type,xrange)
```

其中的 T 是采样周期, 以秒为单位。

2. 变量替换法

在状态反馈控制器的设计中, 我们通过引进一组新的矩阵变量, 将原来的非线性矩阵

不等式转化为新变量的一个线性矩阵不等式,从而可以应用线性矩阵不等式的求解方法来得到这组新变量的值,并进而根据新旧变量之间的替换关系,得到原来变量的值。一种很自然的想法就是:能否将这样一种变量替代的方法推广到输出反馈控制器的设计中。由于在输出反馈 H_∞ 控制器的存在性条件(4.1.12)中,变量之间的非线性关系更加复杂,寻找能将不等式(4.1.12)转化为线性矩阵不等式的变量替换公式就会变得相当困难。在这一部分,我们将介绍用变量替代方法来设计输出反馈 H_∞ 控制器的线性矩阵不等式处理方法。

将矩阵 X_{cl} 和它的逆矩阵进行以下分块:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & W \end{bmatrix}, \quad X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & Z \end{bmatrix}$$

其中: $X, Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵。从等式 $X_{cl} X_{cl}^{-1} = I$ 可得 $X_{cl} \begin{bmatrix} X \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, 据此,进一步可得

$$X_{cl} \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

若定义

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}$$

则 $X_{cl} F_1 = F_2$, 进一步利用矩阵的运算,可得

$$\begin{aligned} F_1^T X_{cl} A_{cl} F_1 &= F_2^T A_{cl} F_1 \\ &= \begin{bmatrix} AX + B_2(D_K C_2 X + C_K M^T) \\ Y(A + B_2 D_K C_2)X + NB_K C_2 X + YB_2 C_K M^T + NA_K M^T \\ A + B_2 D_K C_2 \\ YA + (YB_2 D_K + NB_K)C_2 \end{bmatrix} \\ F_1^T X_{cl} B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ YB_1 + (YB_2 D_K + NB_K)D_{21} \end{bmatrix} \\ C_{cl} F_1 &= [C_1 X + D_{12}(D_K C_2 X + C_K M^T) \quad C_1 + D_{12} D_K C_2] \\ F_1^T X_{cl} F_1 &= F_2^T F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为了找到一个适当的变量替换,能够将矩阵不等式(4.1.12)转化为一个等价的线性矩阵不等式。结合以上得到的关系式,定义以下的变量替换公式:

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= Y(A + B_2 D_K C_2)X + NB_K C_2 X + YB_2 C_K M^T + NA_K M^T \\
\hat{B} &= YB_2 D_K + NB_K \\
\hat{C} &= D_K C_2 X + C_K M^T \\
\hat{D} &= D_K
\end{aligned} \tag{4.1.28}$$

则给定正定矩阵 X 、 Y 及满秩矩阵 M 、 N ，从 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 和 \hat{D} 可惟一确定矩阵 A_K 、 B_K 、 C_K 和 D_K 。另一方面，利用变量替换公式 (4.1.28)，对不等式 (4.1.12) 左边的矩阵分别左乘矩阵 $\text{diag}\{F_1^T, I, I\}$ 和右乘矩阵 $\text{diag}\{F_1, I, I\}$ ，可得矩阵不等式 (4.1.12) 等价于

$$\begin{bmatrix}
AX + XA^T + B_2 \hat{C} + (B_2 \hat{C})^T & \hat{A}^T + (A + B_2 \hat{D} C_2) \\
* & A^T Y + YA + \hat{B} C_2 + (\hat{B} C_2)^T \\
* & * \\
* & * \\
B_1 + B_2 \hat{D} D_{21} & (C_1 X + D_{12} \hat{C})^T \\
YB_1 + \hat{B} D_{21} & (C_1 + D_{12} \hat{D} C_2)^T \\
-I & (D_{11} + D_{12} \hat{D} D_{21})^T \\
* & -I
\end{bmatrix} < 0 \tag{4.1.29}$$

其中：* 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块。不难看出，上式是关于矩阵变量 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} 、 X 和 Y 的一个线性矩阵不等式，因此可以应用求解线性矩阵不等式的有效方法来判断这个线性矩阵不等式是否是可行的，且在可行的情况下求出它的一个可行解。

在得到了线性矩阵不等式 (4.1.29) 的一个可行解后，为了通过变量替换关系 (4.1.28) 求得所要设计的控制器参数，首先需要知道矩阵 M 和 N 的值。

根据恒等式 $X_{cl}^T X_{cl} = I$ ，可得

$$MN^T = I - XY \tag{4.1.30}$$

在得到矩阵 X 和 Y 的值后，可以通过矩阵 $I - XY$ 的奇异值分解来得到满秩矩阵 M 和 N 。 $X_{cl} > 0$ 保证了

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0 \tag{4.1.31}$$

由此可得 $I - XY > 0$ 。因此，总可以通过奇异值分解得到满足 (4.1.22) 式的可逆矩阵 M 和 N 。控制器参数矩阵可以通过以下的公式得到：

$$\begin{aligned}
D_K &= \hat{D} \\
C_K &= (\hat{C} - D_K C_2 X)(M^T)^{-1} \\
B_K &= N^{-1}(\hat{B} - YB_2 D_K) \\
A_K &= N^{-1}[\hat{A} - Y(A + B_2 D_K C_2)X](M^T)^{-1} - B_K C_2 X(M^T)^{-1} - N^{-1}YB_2 C_K
\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

总结以上的讨论，得到下面的定理。

定理 4.1.3 系统 (4.1.1) 存在一个输出反馈 H_∞ 控制器 (4.1.10) 当且仅当存在对称矩阵 X 、 Y 和矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} ，使得线性矩阵不等式 (4.1.29) 和 (4.1.31) 是可行的。

进而，若 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} 、 X 和 Y 是线性矩阵不等式 (4.1.29) 和 (4.1.31) 的一个可行解，则通过矩阵 $I - XY$ 的奇异值分解可以得到矩阵 M 和 N ，并利用 (4.1.32) 式得到控制器参数矩阵。

对给定的标量 $\gamma > 0$ ，系统 (4.1.1) 的输出反馈 γ -次优 H_∞ 控制器可以通过求解以下的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2\hat{C} + (B_2\hat{C})^T & \hat{A}^T + (A + B_2\hat{D}C_2) \\ * & A^TY + YA + \hat{B}C_2 + (\hat{B}C_2)^T \\ * & * \\ * & * \\ B_1 + B_2\hat{D}D_{21} & (C_1X + D_{12}\hat{C})^T \\ YB_1 + \hat{B}D_{21} & (C_1 + D_{12}\hat{D}C_2)^T \\ -\gamma I & (D_{11} + D_{12}\hat{D}D_{21})^T \\ * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1.33)$$

和不等式 (4.1.31)，并根据定理 4.1.3 提供的构造方法得到。系统 (4.1.1) 的输出反馈最优 H_∞ 控制器则可以通过求解以下的优化问题得到：

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & (4.1.31) \\ & (4.1.33) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

问题 (4.1.34) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

注意到在变量替换公式 (4.1.28) 中，变量 D_k 实际上并没有变换，得到的控制器 (4.1.10) 传递函数是真 (proper) 的。如果要求设计一个严格真的输出反馈 H_∞ 控制器，则可以通过在定理 4.1.3 中首先令变量 $\hat{D} = 0$ ，然后按定理给出的步骤设计得到。

在以上给出的基于线性矩阵不等式的输出反馈 H_∞ 控制器设计方法中，需要求解线性矩阵不等式 (4.1.29) 和 (4.1.31)，然后再求 $I - XY$ 的奇异值分解，最后根据公式 (4.1.32) 求得控制器的参数矩阵。为了有效地设计控制器，应该在这些计算中避免可能出现的数值问题，例如应该避免线性矩阵不等式系统 (4.1.29) 和 (4.1.31) 可行解的取值太大、 $I - XY$ 接近奇异等情况的出现。为此，可以采用以下的步骤：

- 在线性矩阵不等式系统 (4.1.29) 和 (4.1.31) 中增加约束条件：

$$\|X\| < \alpha, \quad \|Y\| < \alpha, \quad \left\| \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} \right\| < \alpha$$

这样一个上界约束可以等价地写成：

$$\begin{aligned}
 X &< \alpha I \\
 Y &< \alpha I \\
 \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha I & 0 & \hat{A} & \hat{B} \\ 0 & \alpha I & \hat{C} & \hat{D} \\ \hline \hat{A}^\top & \hat{B}^\top & \alpha I & 0 \\ \hat{C}^\top & \hat{D}^\top & 0 & \alpha I \end{array} \right] &> 0
 \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解优化问题:

$$\begin{aligned}
 &\min \alpha \\
 &\text{s.t.} \quad (4.1.29) \\
 &\quad \quad (4.1.31) \\
 &\quad \quad (4.1.35)
 \end{aligned}$$

从而得到最小上界 α^* 。

● 固定 $\alpha > \alpha^*$ ，在线性矩阵不等式系统 (4.1.29)、(4.1.31) 和 (4.1.35) 中增加一个约束

$$\begin{bmatrix} Y & \beta I \\ \beta I & X \end{bmatrix} > 0 \tag{4.1.36}$$

显然，这样引入的线性矩阵不等式系统当 $\beta=1$ 时是可行的。因此，在这样一组线性矩阵不等式约束下，求 β 的最大化问题是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，应用求解器 mincx 可以得到最优值 $\beta^* > 1$ 。由于不等式 (4.1.36) 等价于 $X - \beta^2 Y^{-1} > 0$ ，因此， β^* 将使得“ X 尽可能偏离 Y^{-1} ”，从而希望 $I - XY$ 的最小奇异值尽可能偏离原点。这将改进矩阵 M 和 N 的条件数，使得控制器参数矩阵的计算更加可靠。

这一节主要采用线性矩阵不等式处理方法研究了系统 (4.1.1) 输出反馈 H_∞ 控制器的设计问题，分别用消元法和变量替换法这两种方法给出了基于求解一个线性矩阵不等式问题的输出反馈 H_∞ 控制器设计方法。消元法分两步来求解输出反馈 H_∞ 控制器，过程较为复杂；变量替换法则用一个线性矩阵不等式系统的可行性给出了控制器的存在条件，进而用该线性矩阵不等式系统的可行解直接构造出所求的控制器，这一处理方法便于和其他性能约束相结合来处理系统的多目标控制问题。

4.2 H_2 控制

考虑由以下状态空间模型描述的系统：

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\
 z &= Cx + Du
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

其中： $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量， $u \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入， $z \in \mathbf{R}^r$ 是被调输出， $w \in \mathbf{R}^q$ 是外部扰

动, A 、 B_1 、 B_2 、 C 和 D 是已知的适当维数实矩阵。

本节的目的是对给定的标量 $\gamma > 0$, 设计一个状态反馈控制律

$$u = Kx \quad (4.2.2)$$

使得闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z &= (C + DK)x \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

是渐近稳定的, 且闭环传递函数 $T_{wz}(s)$ 的 H_2 范数满足 $\|T_{wz}(s)\|_2 < \gamma$ 。具有这样性质的控制律 (4.2.2) 称为系统 (4.2.1) 的一个状态反馈 H_2 控制律。

以下的定理给出了状态反馈 H_2 控制律的存在条件和设计方法。

定理 4.2.1 对给定的标量 $\gamma > 0$, 系统 (4.2.1) 存在状态反馈 H_2 控制律, 当且仅当存在对称正定矩阵 X 、 Z 和矩阵 W , 使得

$$AX + B_2 W + (AX + B_2 W)^T + B_1 B_1^T < 0 \quad (4.2.4)$$

$$\begin{bmatrix} -Z & CX + DW \\ (CX + DW)^T & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.5)$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2 \quad (4.2.6)$$

进而, 如果矩阵不等式 (4.2.4)、(4.2.5) 和 (4.2.6) 存在一个可行解 X^*, W^*, Z^* , 则 $u = W^*(X^*)^{-1}x$ 是系统 (4.2.1) 的一个状态反馈 H_2 控制律。

证明 根据定理 3.1.5, 闭环系统 (4.2.3) 是渐近稳定且满足 $\|T_{wz}(s)\|_2 < \gamma$ 的一个充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X , 使得

$$(A + B_2 K)X + X(A + B_2 K)^T + B_1 B_1^T < 0 \quad (4.2.7)$$

$$\text{Trace}[(C + DK)X(C + DK)^T] < \gamma^2 \quad (4.2.8)$$

由于对满足 $M_1 < M_2$ 的矩阵 M_1 和 M_2 , 有 $\text{Trace}(M_1) < \text{Trace}(M_2)$, 故通过引进一个对称矩阵 Z , 可得矩阵不等式 (4.2.8) 等价于

$$(C - DK)X(C + DK)^T < Z \quad (4.2.9)$$

$$\text{Trace}(Z) < \gamma^2 \quad (4.2.10)$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 可得矩阵不等式 (4.2.9) 等价于

$$\begin{bmatrix} -Z & (C + DK)X \\ X(C + DK)^T & -X \end{bmatrix} < 0 \quad (4.2.11)$$

定义 $W = KX$, 则由 (4.2.7)、(4.2.10) 和 (4.2.11) 可得定理的结论。定理得证。

矩阵不等式 (4.2.4) ~ (4.2.6) 是一个线性矩阵不等式系统, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式系统, 进而可以利用求解器 `feasp` 提供的可行解构造出系统的状态反馈 H_2 控制律。事实上, 如果系统 (4.2.1) 存在状态反馈 H_2 控制律, 则定理 4.2.1 用一组凸约束给出了所有状态反馈 H_2 控制律的一个参数化表示。这样一

种凸约束表示可以用来处理系统具有 H_2 性能要求的多目标控制问题。

优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho \\ \text{s.t.} \quad & (4.2.4) \\ & (4.2.5) \\ & \text{Trace}(\mathbf{Z}) < \rho \end{aligned}$$

给出了系统 (4.2.1) 的最优状态反馈 H_2 控制律的设计方法。很容易看到：这个优化问题是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

根据定理 3.1.5，并采用上一节介绍的变量替换法，可以得到基于求解一个线性矩阵不等式系统可行性问题的输出反馈 H_2 控制器设计方法。进而，通过求解一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，可以得到系统 (4.2.1) 的最优输出反馈 H_2 控制器。

4.3 H_2/H_∞ 控制

在实际设计问题中，人们通常需要所设计的系统满足多种性能要求。特别地，对系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{w}_2 \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{10}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1 \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{20}\mathbf{u} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{w}_2 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

我们希望设计一个控制器，使得闭环系统是渐近稳定的，且从 \mathbf{w}_1 到 \mathbf{z}_1 的闭环传递函数 $\mathbf{T}_{\mathbf{w}_1\mathbf{z}_1}$ 的 H_∞ 范数不超过一个给定的上界 γ_1 ，以保证闭环系统对由 $\mathbf{w}_1 = \Delta\mathbf{z}_1$ 进入的不确定性具有鲁棒稳定性；同时使得从 \mathbf{w}_2 到 \mathbf{z}_2 的闭环传递函数 $\mathbf{T}_{\mathbf{w}_2\mathbf{z}_2}$ 的 H_2 范数尽可能小，以保证用 H_2 范数度量的系统性能处于一个好的水平（例如对白噪声输入 \mathbf{w}_2 ， \mathbf{z}_2 具有小的稳态方差；或对脉冲输入 \mathbf{w}_2 ，被控输出 \mathbf{z}_2 具有小的能量）。这样一个问题相当于在使得闭环系统满足

$$\sigma(\mathbf{A}_c) \subset \mathbb{C}^-, \|\mathbf{T}_{\mathbf{w}_1\mathbf{z}_1}\|_\infty < \gamma_1, \|\mathbf{T}_{\mathbf{w}_2\mathbf{z}_2}\|_2 < \gamma_2 \quad (4.3.2)$$

的所有控制器中，寻找使得 γ_2 最小化的控制器。这个问题称为系统 (4.3.1) 的多目标 H_2/H_∞ 控制问题，或简称为 H_2/H_∞ 控制问题。

通过对不同的标量 γ_1 求解相应的 H_2/H_∞ 控制问题，可以分析系统 H_2 性能和 H_∞ 性能之间的关系。对 $[\gamma_1^l, \gamma_1^u]$ 中的 γ_1 ，其中的 γ_1^l 可以取得接近系统的最优 H_∞ 性能指标，画出 H_2/H_∞ 控制问题的最优值曲线，这样的曲线关于 γ_1 应该是非增的。实际曲线将告诉我们系统的 H_∞ 性能和 H_2 性能之间的关系，例如通过牺牲系统的鲁棒性，可以在多大程度上改进系统的性能。

以下将讨论系统 (4.3.1) 的状态反馈 H_2/H_∞ 控制律设计方法。假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则在状态反馈

$$u = Kx \quad (4.3.3)$$

下, 系统 (4.3.1) 的闭环系统是

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + B_1 w_1 + B_2 w_2 \\ z_1 &= (C_1 + D_{10}K)x + D_{11}w_1 \\ z_2 &= (C_2 + D_{20}K)x + D_{22}w_2 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

根据定理 3.1.3 和定理 3.1.5 及定理 4.1.1 和定理 4.2.1 的证明, 闭环系统 (4.3.4) 具有性能 (4.3.2), 当且仅当存在对称正定矩阵 X_1 和 X_2 , 使得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (A + BK)X_1 + X_1(A + BK)^T & B_1 & X_1(C_1 + D_{10}K)^T \\ B_1^T & -\gamma_1 I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{10}K)X_1 & D_{11} & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0 \\ &(A + BK)X_2 + X_2(A + BK)^T + B_2 B_2^T < 0 \\ &\begin{bmatrix} -Z & (C_2 + D_{20}K)X_2 \\ X_2(C_2 + D_{20}K)^T & -X_2 \end{bmatrix} < 0 \\ &D_{22} = 0, \quad \text{Trace}(Z) < \gamma_2 \end{aligned}$$

在以上的不等式系统中, 同一个控制律增益矩阵和两个不同的 Lyapunov 矩阵 X_1 和 X_2 耦合在一起, 因此, 不能按前面所介绍的变量替换方法将以上的矩阵不等式系统转换成一个线性矩阵不等式系统。要求解这样一个非线性矩阵不等式问题仍然是一件很困难的工作。

如果在以上矩阵不等式系统中, 令

$$X = X_1 = X_2 \quad (4.3.5)$$

则可以应用变量替换方法, 得到系统 (4.3.1) 的一个状态反馈 H_2/H_∞ 控制律设计方法。

定理 4.3.1 对系统 (4.3.1) 和一个给定的标量 $\gamma_1 > 0$, 若 $D_{22} = 0$, 且以下的优化问题

$$\begin{aligned} &\min \gamma_2 \quad (4.3.6) \\ \text{s.t.} &\begin{bmatrix} AX + BW + (AX + BW)^T & B_1 & (C_1 X + D_{10}W)^T \\ B_1^T & -\gamma_1 I & D_{11}^T \\ C_1 X + D_{10}W & D_{11} & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0 \\ &AX + BW + (AX + BW)^T + B_2 B_2^T < 0 \\ &\begin{bmatrix} -Z & C_2 X + D_{20}W \\ (C_2 X + D_{20}W)^T & -X \end{bmatrix} < 0 \\ &\text{Trace}(Z) < \gamma_2 \end{aligned}$$

有一个最优解 X, W ，则系统 (4.3.1) 的状态反馈 H_2/H_∞ 控制问题是可解的，且 $u = WX^{-1}x$ 是系统 (4.3.1) 的一个状态反馈 H_2/H_∞ 控制律。

问题 (4.3.6) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求解该问题。

以上的求解方法是通过引进了约束条件 (4.3.5) 后导出的，因此得到的结果具有一定的保守性。然而，这样的保守性的引进所换来的却是计算上的方便和有效性。如何估计由于约束条件 (4.3.5) 所带来的保守性的大小，目前还没有有效的方法。

许多研究人员在如何减小由约束条件 (4.3.5) 引起的结果保守性方面做了不少的工作，也相继提出了一些改进方法。其中 Oliveira (1999) 等通过引进一个附加变量，提出了与定理 4.1.3 和定理 4.1.5 等价的系统 H_2 和 H_∞ 性能条件，根据这些条件导出了基于约束条件 (4.3.5) 的 H_2/H_∞ 控制问题解。显然，由于在优化问题 (4.3.6) 中引进了一个附加变量，因此这种方法可望得到比优化问题 (4.3.5) 更小的最优值，从而降低结果的保守性。

在得到了状态反馈 H_2/H_∞ 控制律后，可以对闭环系统进行独立的 H_∞ 和 H_2 性能分析。一般地，闭环系统的实际 H_∞ 性能严格小于 γ_1 ， H_2 性能也严格小于在求解 H_2/H_∞ 控制问题中所得到的最优值。

LMI 工具箱提供了求解 H_2/H_∞ 控制问题的一个函数 `hinfmix`，该函数求解了由图 4.2 所示的多目标输出反馈控制问题。

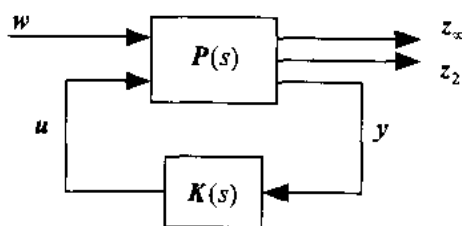


图 4.2 H_2/H_∞ 控制问题

分别用 $T_\infty(s)$ 和 $T_2(s)$ 作为从 w 到 z_∞ 和 w 到 z_2 的闭环传递函数，则 `hinfmix` 可以计算以下综合问题的解。

设计一个线性时不变控制器 $K(s)$ ，使得闭环系统满足：

- $\|T_\infty\|_\infty < \gamma_0$
- $\|T_2\|_2 < \nu_0$
- 闭环系统极点位于某个给定的 LMI 区域 D (见第 6 章)

且使得性能指标

$$\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2$$

最小化。

函数 `hinfmix` 的一般形式是：

```
[gopt,h2opt,K,R,S]=hinfmix(P,r,obj,region,dkbnd,tol)
```


在该函数的输入项中, P 是控制对象 $P(s)$ 的系统矩阵表示, r 是一个 3 元向量, 依次表示了 z_2 、 y 和 u 的维数。注意, z_u 和/或 z_2 可以是空的。obj 是一个 4 元向量, 表示了 H_2/H_∞ 约束及性能指标中 H_∞ 性能和 H_2 性能的权重情况, $\text{obj}=[\gamma_0, \nu_0, \alpha, \beta]$ 。输入项中的其余部分是可选的。

LMI 工具箱中的函数 `msfsyn` 也提供了类似的功能, 具体可看第 6 章的介绍。

4.4 设计示例

本节利用前面 3 节所提出的方法, 通过一个实际例子, 并应用 LMI 工具箱所提供的函数和求解器来说明这些方法的使用。

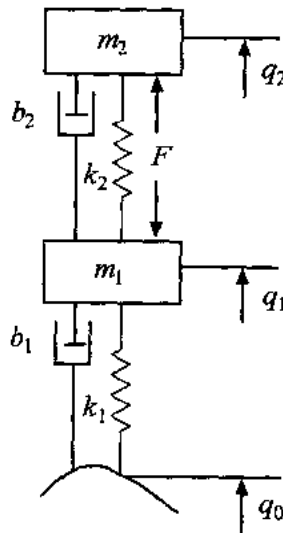


图 4.3 活动悬挂系统的模型

考虑如图 4.3 所示的一个车辆悬浮系统, 其中 m_1 表示轮胎、轮子和后轴的质量, m_2 表示底盘的质量, F (或 $-F$) 是作用在底盘 (或轴) 上的力, b_1 、 b_2 是阻尼系数, k_1 、 k_2 是弹性系数, q_0 表示路面的状况, 这些物理参数的取值由表 4.2 给出。偏差变量 q_i 已被适当地放大或缩小, 以使得在稳态状态下 $q_2 - q_1 = 0$ 、 $q_1 - q_0 = 0$ 。系统可以用以下的状态模型来表示:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B \begin{bmatrix} q_0 \\ F \end{bmatrix} \\ y &= C_2 x + D_2 \begin{bmatrix} q_0 \\ F \end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} - \frac{b_1}{m_1} \frac{b_1+b_2}{m_1} & -\frac{1}{m_1} \\ \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 - b_1 q_0/m_1 \ \dot{q}_2]^T$ 和 $y = [\ddot{q}_2 \ q_2 - q_1]^T$ 分别定义了系统的状态向量和测量输出, 系统的控制输入是 F , 外界扰动输入是路面 q_0 。

表 4.2 物理参数

m_1	m_2	k_1	k_2	b_1	b_2
1.5×10^3	1.0×10^4	5.0×10^6	5.0×10^5	1.7×10^3	50×10^3

这里要研究的问题是设计一个输出反馈控制器 $F = K(s)y$, 使得所导出的活动悬浮控制系统在车辆的整个行驶过程中具有较低水平的震动 (即 \ddot{q}_2 较小)、有界的悬浮偏差 ($q_2 - q_1$ 和 $q_1 - q_0$) 和有界的动态轮胎作用力 (F)。将这样一些关心的变量组成系统的被控向量 $z = [q_1 - q_0 \ F \ \ddot{q}_2 \ q_2 - q_1]^T$, 则可得到被控方程

$$z = C_1 x + D_1 \begin{bmatrix} q_0 \\ F \end{bmatrix}$$

其中:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假定路面状况可以用 $q_0 = W_{q_0} \tilde{q}_0$ 来表示, 其中 $\tilde{q}_0 \in L_2$, W_{q_0} 是一个传递函数:

$$W_{q_0}(s) = \frac{0.01}{0.4s + 1}$$

它反映了车辆匀速行驶时的路况。定义一个被控输出 $\tilde{z} = W_z z$, 其中 W_z 是一个加权矩阵:

$$W_z(s) = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.0318s+0.4}{3.16 \times 10^{-4}s^2 + 0.0314s + 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

它反映了人对垂直震动的敏感性。

根据以上的定义,我们的控制要求相当于对广义系统

$$P: \begin{bmatrix} \tilde{q}_0 \\ F \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \tilde{z} \\ y \end{bmatrix}$$

设计一个最优 H_∞ 输出反馈控制器,使得从 \tilde{q}_0 到 \tilde{z} 的闭环传递函数的 H_∞ 范数最小化。

为此,必须首先确定广义系统 P 。设

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

是从 $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix}$ 到 $\begin{bmatrix} q_0 \\ F \end{bmatrix}$ 的传递函数矩阵,则它可以由以下的语句确定:

```

m1=1.5*10^3;m2=1.0*10^4;
k1=5.0*10^6;k2=5.0*10^5;
b1=1.7*10^3;b2=50*10^3;
A=[0 0 1 0
    0 0 0 1
    -(k1+k2)/m1 k2/m1 -(b1+b2)/m1 b2/m1
    k2/m2 -k2/m2 b2/m2 -b2/m2];
B=[b1/m1 0;
    0 0
    k1/m1-(b1*(b1+b2))/(m1*m1) -1/m1
    (b1*b2)/(m1*m2) 1/m2];
C1=[1 0 0 0
    0 0 0 0
    k2/m2 -k2/m2 b2/m2 -b2/m2
    -1 1 0 0];
D1=[-1 0;0 1; (b1*b2)/(m1*m2) 1/m2;0 0];
C2=[k2/m2 -k2/m2 b2/m2 -b2/m2
    -1 1 0 0];
D2=[(b1*b2)/(m1*m2) 1/m2;0 0];
sysG=ltisys(A,B,[C1;C2],[D1;D2]);

```

传递函数矩阵 P 可以由以下的关系式得到

$$P = \begin{bmatrix} W_z & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} W_{q_0} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

因此,系统 P 可以看成是由三个环节串联而成的,而其中的第 1 和第 3 个环节又可以看成是两个环节并联得到的。LMI 工具箱分别提供了命令 `smult` 和 `sdiag` 来给出由若干个环节串联或并联系统的系统矩阵表示。利用这两个命令可以得到系统 P 的系统矩阵表示:

```

syswq0=ltisys('tf',[0.01],[0.4 1]);
syswz1=ltisys('tf',200,1);
syswz2=ltisys('tf',0.1,1);
syswz3=ltisys('tf',[0.0318 0.4],[0.000316 0.0314 1]);
syswz4=ltisys('tf',100,1);
syswz5=ltisys('tf',1,1);
syswz=sdiag(syswz1,syswz2,syswz3,syswz4,syswz5,syswz5);
syswq=sdiag(syswq0,syswz5);
sys=smult(syswq,sysG,syswz)

```

进一步, 以下的命令

```

[gopt,K]=hinflmi(sys,[2 1])
[Ak,Bk,Ck,Dk]=ltiss(K)

```

给出了系统 P 的最优输出反馈 H_∞ 控制器, 其控制器参数矩阵是

$$\begin{aligned}
 A_k &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -1.3555 & 0.1120 & -0.1756 & 0.1737 & 0.0716 & -0.2465 & -1.6883 \\ 0.0735 & -0.0215 & 0.0056 & -0.0032 & -0.0218 & 0.0205 & 0.0929 \\ -0.2686 & 0.0234 & -0.0445 & 0.0327 & 0.0087 & -0.0692 & -0.3373 \\ 0.2812 & -0.0257 & 0.0371 & -0.0354 & -0.0159 & 0.0587 & 0.3513 \\ 0.2269 & -0.0089 & 0.0355 & -0.0328 & 0.0022 & 0.0451 & 0.2829 \\ 0.5500 & -0.0489 & 0.0731 & -0.0683 & -0.0310 & 0.1036 & 0.6855 \\ -1.4296 & 0.1162 & -0.1747 & 0.1893 & 0.0744 & -0.2669 & -1.7819 \end{bmatrix} \\
 B_k &= 10^3 \times \begin{bmatrix} -3.5579 & -0.7384 \\ 0.2422 & 1.5190 \\ -0.8014 & -6.5800 \\ 0.7502 & 1.0340 \\ 0.5952 & 1.4045 \\ 1.4876 & 2.5177 \\ -3.5725 & 7.9970 \end{bmatrix} \\
 C_k &= [-1.5348 \quad 0.0384 \quad -0.2600 \quad 0.0761 \quad -0.3244 \quad -1.4259 \quad -2.3389] \\
 D_k &= [0 \quad 0]
 \end{aligned}$$

相应的闭环系统最优 H_∞ 性能指标是 0.5628。

根据以上求出的控制器, 我们来分析闭环系统中扰动 q_0 对被控变量 z 的影响。为此, 首先要得到从 q_0 到 z 的闭环传递函数 $W_{q_0z}(s)$ 。可以用函数 `sift` 来得到 $W_{q_0z}(s)$:

```
sysq0z=sift(sysG,K,1,2)
```

用函数 `ssub` 可以得到 q_0 到各个被控变量 $q_1 - q_0$ 、 F 、 \ddot{q}_2 和 $q_2 - q_1$ 的传递函数。进一步, 用命令 `splot` 可以画出 q_0 到这些被控变量之间的频域响应曲线和时域阶跃响应曲线。

第5章 不确定系统的分析与综合

5.1 不确定模型

在鲁棒控制中，不确定动态系统的概念是相当重要的。为了进行有效的控制系统设计，一个复杂的动态系统必须用一个相对简单的模型来描述。而这样一个简化模型和实际对象之间的差距称为模型不确定性。除了在模型简化中可能带来模型的不确定性外，对系统某些特性或环节缺乏足够的了解（即难以建模的部分），由于系统环境的变化、元器件的老化、某些物理参数的漂移或随时间的未知变化等因素所带来的系统行为的变化也可能导致模型不确定性的产生。这里所指的模型不确定性不同于诸如外部扰动、测量噪声等外部不确定因素的作用。

本章将介绍一些典型的不确定性系统模型，并将前两章介绍的线性时不变系统的性能分析和综合问题推广到具有模型不确定性的系统，提出一些不确定系统鲁棒分析和综合的方法。

本章主要考虑由线性模型加上某个可能非线性、甚至可能是时变的模型不确定性描述的一类动态系统，其中的线性模型称为系统的名义模型，即忽略了模型不确定性后得到的模型。对系统名义模型和模型不确定性的描述直接影响到系统可达到的性能，不确定性的变化范围越小，即名义模型越精确，则可望得到更好的系统性能；另外，对不确定性的信息了解得越多（例如相位、结构、时不变等），则可达到的系统性能也就越高。

模型不确定性主要有两类：

- 动态不确定性：例如在线性模型中忽略的动态特性，由于慢时变特性的忽略、输入中的非线性等因素导致的动态行为的变化；
- 参数不确定性：一些难于精确刻画物理参数，或者在运行过程中发生变化但难以刻画其变化规律的参数。例如，机械系统中的阻尼系数和弹性系数、飞行装置中的空气动力学系数、电路中的电容和电感等。

不确定性的其他特性包括是否为线性的、是否为时变的等。模型不确定性一般是动态不确定性和参数不确定性的组合，并可能出现在控制环的不同位置上。例如，在系统的执行器上可能出现动态不确定性，在某些传感器的系数上可能出现参数不确定性等。

5.1.1 不确定状态空间模型

我们已经知道可以用一个状态空间模型来描述一个动态系统。然而，描述实际动态系统的状态空间模型往往是通过近似和简化得到的，因此，在得到的模型

$$E\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

中, 系数矩阵 E 、 A 、 B 、 C 、 D 不再是已知的常数矩阵, 而往往是依赖不确定参数的不确定矩阵, 其中的不确定参数可能是时变的, 但一般可假定其在某个已知的有界集中变化。根据系数矩阵 E 、 A 、 B 、 C 、 D 对不确定参数的依赖情况, 引进以下两类不确定模型。

多胞型模型

多胞型模型是以下的一类时变系统模型:

$$E(t)\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x + D(t)u$$

该系统的 SYSTEM 矩阵 $S(t) = \begin{bmatrix} A(t) + jE(t) & B(t) \\ C(t) & D(t) \end{bmatrix}$ 在以下一个给定的矩阵多胞型模型中取值, 即

$$S(t) \in \text{Co}\{S_1, \dots, S_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i S_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

其中: S_1, \dots, S_k 是已知的矩阵,

$$S_1 = \begin{bmatrix} A_1 + jE_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \dots, S_k = \begin{bmatrix} A_k + jE_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 是不确定参数。注意这些不确定参数未必是系统中的物理参数, 因此这种不确定性模型的表示也称为是参数不确定性的隐式表示。在有些文献中, 多胞型模型也称为多胞型线性微分包含。

多胞型模型可以用来描述许多实际系统, 例如:

- 一个系统的多模型表示, 其中的每一个模型表示系统在一个特定运行条件下的状况。
- 表示一个非线性系统:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u$$

$$y = C(x)x + D(x)u$$

如系统 $\dot{x} = (\sin x)x$, 其状态矩阵 $A = \sin x$ 位于多胞型模型 $A \in \text{Co}\{-1, 1\} = [-1, 1]$ 。

- 描述一类仿射依赖时变参数的状态空间模型。

多胞型模型可以通过其 SYSTEM 矩阵所在多胞型模型的角点 S_1, \dots, S_k 来描述。LMI 工具箱提供了函数 `psys` 来描述多胞型模型。

仿射参数依赖模型

前面已提到, 一个动态系统往往存在一些不确定参数。一个含有不确定参数的线性系统可以有以下的表示:

$$E(p)\dot{x} = A(p)x + B(p)u$$

$$y = C(p)x + D(p)u$$

其中: $A(\cdot)$ 、 $B(\cdot)$ 、 $C(\cdot)$ 、 $D(\cdot)$ 和 $E(\cdot)$ 是参数向量 $p=[p_1, \dots, p_n]$ 的已知矩阵值函数。这样一类模型称为参数依赖模型。这类模型常常出现在运动、空气动力学、电路等系统中。

如果模型中的系数矩阵仿射依赖于参数向量 p , 即

$$A(p) = A_0 + p_1 A_1 + \dots + p_n A_n$$

$$B(p) = B_0 + p_1 B_1 + \dots + p_n B_n$$

$$C(p) = C_0 + p_1 C_1 + \dots + p_n C_n$$

$$D(p) = D_0 + p_1 D_1 + \dots + p_n D_n$$

$$E(p) = E_0 + p_1 E_1 + \dots + p_n E_n$$

其中: A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 、 E_i 是已知的常数矩阵。具有这样系数矩阵的模型称为仿射参数依赖模型。由于仿射参数依赖模型的特点, 使得 Lyapunov 方法可以有效地用于这类模型的综合。如果记

$$S(p) = \begin{bmatrix} A(p) + jE(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix}, S_i = \begin{bmatrix} A_i + jE_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

则仿射参数依赖模型的 SYSTEM 矩阵可以表示成

$$S(p) = S_0 + p_1 S_1 + \dots + p_n S_n$$

因此, S_0, \dots, S_n 完全刻画了所要描述的仿射参数依赖模型。注意, 这里的 S_0, \dots, S_n 并不代表有意义的实际系统。有时为了处理的方便, 可以通过适当的变换将不确定参数标准化, 即将 $S(p)$ 表示成

$$S(p) = \tilde{S}_0 + \delta_1 \tilde{S}_1 + \dots + \delta_n \tilde{S}_n, |\delta_i| \leq 1$$

例如, 系统 $\dot{x} = -\alpha x, \alpha \in [0.1 \ 0.7]$ 可以表示成

$$\dot{x} = (-0.4 + 0.3\delta)x, |\delta| \leq 1$$

此时, 参数 δ_i 已没有具体的物理意义。

根据这一表示, LMI 工具箱提供了函数 `psys` 来描述一个仿射参数依赖模型。函数 `pdsimul` 则给出了仿射参数依赖模型时间响应的仿真。

以下通过一个简单的例子来说明多胞型模型和参数依赖模型描述。

例 5.1.1 考虑由以下方程描述的一个电路

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + Ci = V$$

其中的电感 L 、电阻 R 、电容 C 是不确定参数, 它们的容许变化范围分别是:

$$L \in [10, 20], R \in [1, 2], C \in [100, 150]$$

该系统在无驱动下的一个状态空间模型表示是

$$E(L, R, C)\dot{x} = A(L, R, C)x$$

其中:

$$\mathbf{x} = [i \quad di/dt]^T$$

$$\mathbf{A}(L, R, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R & -C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \times \mathbf{0} + R \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}(L, R, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + R \times \mathbf{0} + C \times \mathbf{0}$$

这个仿射系统模型可以用函数 `psys` 描述如下:

```
a0=[0 1;0 0];e0=[1 0;0 0];s0=ltisys(a0,e0)
aL=zeros(2);eL=[0 0;0 1];sL=ltisys(aL,eL)
aR=[0 0;-1 0];sR=ltisys(aR,0)
aC=[0 0;0 -1];sC=ltisys(aC,0)

pv=pvec('box',[10 20;1 2;100 150])
pds=psys(pv,[s0 sL sR sC])
```

所得到的结论可以用 `psinfo` 和 `pvinfos` 来检验:

```
psinfo(pds)

Affine parameter-dependent system with 3 parameters (4 systems)
  Each system has 2 state(s), 0 input(s), and 0 output(s)

pvinfos(pv)

vector of 3 parameters ranging in a box
```

对于 L 、 R 和 C 的一组给定值, 可以求得对应的系统, 例如对 $L=15$, $R=1.2$, $C=150$, 其对应的系统可以用以下语句来描述:

```
sys=psinfo(pds,'eval',[15 1.2 150])
[A,B,C,D,E]=ltiss(sys)
```

由这个仿射模型也可以得到它的一个多胞型模型表示:

```
pols=aff2pol(pds)
psinfo(pols)

polytopic model with 8 vertex systems
  Each system has 2 state(s), 0 input(s), and 0 output(s)
```


函数 `aff2pol` 可以将一个仿射参数依赖模型转化成一个多胞型模型。

5.1.2 不确定线性分式模型

对同时具有动态和参数不确定性的系统，不确定性的一个更一般的表示是如图 5.1 所示的线性分式模型。

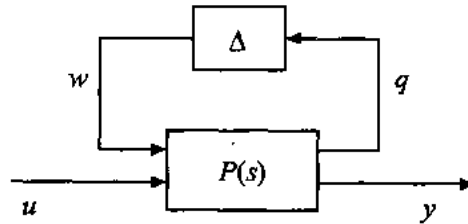


图 5.1 线性分式模型

其中的线性时不变系统 $P(s)$ 包含了所有已知的线性时不变环节（控制器、系统的名义模型、传感器、执行器等），输入向量 u 包含了作用于系统的所有外部信号（扰动、噪声、参考输入信号等）， y 表示由系统产生的所有输出信号， Δ 是一个不确定性的结构描述，具有以下形式：

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_r\}$$

其中的每一个块 Δ_i 反映了一种特定的不确定性（例如被忽略的动态特性、非线性特性、不确定参数等）。

以下通过一个例子来说明一般的不确定系统是如何用一个线性分式模型来描述的。

例 5.1.2 考虑以下的反馈环（如图 5.2 所示）：

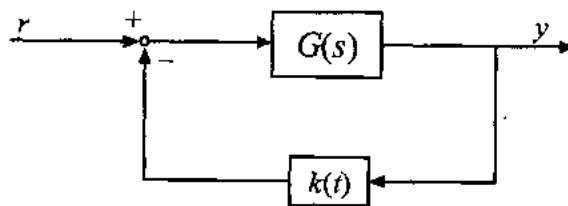


图 5.2 反馈关联

其中： $G(s)$ 是一个不确定的线性时不变系统，它可以用一个二阶名义模型

$$G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 0.01s + 1}$$

来近似，且近似的相对误差在 5% 内，即 $G(s)$ 可以表示成 $G(s) = G_0(s)(I + \Delta(s))$ ，其中的模型不确定性 $\Delta(s)$ 是任意满足 $\|\Delta(s)\|_\infty < 0.05$ 的稳定线性时不变系统， $k(t)$ 是一个漂移的反馈增益，可以表示成

$$k(t) = k_0 + \delta(t)$$

其中的 k_0 是增益 $k(t)$ 的名义值, $\delta(t)$ 是不确定量, 满足 $|\delta(t)| < 0.1k_0$ 。

对这样一个反馈系统, 为了用一个如图 5.1 所示的线性分式模型来表示, 首先需要将其中未知的不确定部分和已知的确定部分分离。为此, 通过框图运算, 可以得到与图 5.2 等效的结构框图 (如图 5.3 所示)。

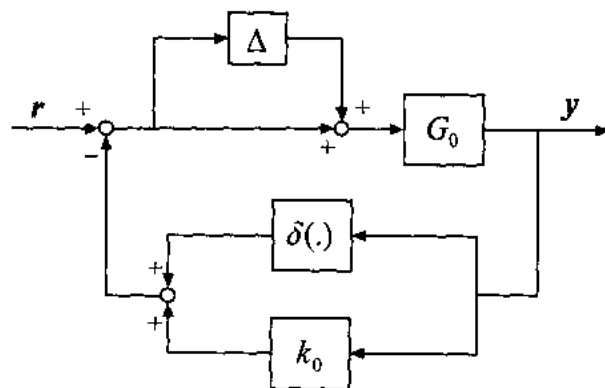


图 5.3 不确定性和名义模型的分离

进一步将不确定部分放在一起, 从图 5.3 可以得到如图 5.4 所示的框图。

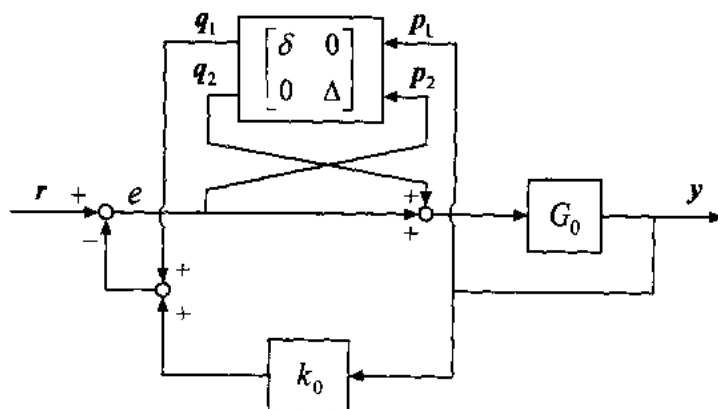


图 5.4 不确定块的集结

如果分别用 $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ 表示不确定块的输入和输出向量, 不确定块以外的部分用 $P(s)$ 来表示, 则可以将结构框图 5.4 表示成以下更为简洁的等效框图 (如图 5.5 所示)。

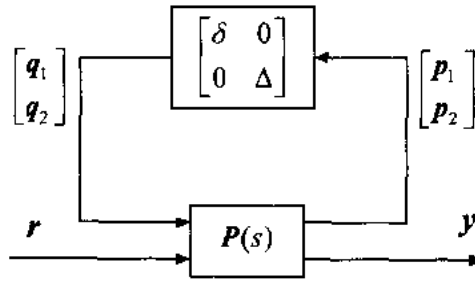


图 5.5 线性分式模型的形式

容易看出， $P(s)$ 就是从 $[q_1^T \ q_2^T \ r^T]^T$ 到 $[p_1^T \ p_2^T \ y^T]^T$ 的传递函数。因此，可以从图 5.4 通过应用工具 sconnect 或 SIMULINK 来计算 $P(s)$ 的 SYSTEM 矩阵。

本书主要研究状态空间下的不确定模型。为了导出状态空间的线性分式模型，考虑

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) &= \hat{C}x(t) + \hat{D}u(t)\end{aligned}\quad (5.1.1)$$

这里的系数矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 、 \hat{D} 并不是常数矩阵，而是依赖不确定参数的不确定矩阵，它们具有以下表示式：

$$\begin{aligned}\hat{A} &= A + E_a \Delta_a F_a, & \hat{B} &= B + E_b \Delta_b F_b \\ \hat{C} &= C + E_c \Delta_c F_c, & \hat{D} &= D + E_d \Delta_d F_d\end{aligned}\quad (5.1.2)$$

其中： A 、 B 、 C 和 D 是适当维数的实常数矩阵，描述了系统的名义模型，即忽略了模型不确定性后得到的系统模型； Δ_a 、 Δ_b 、 Δ_c 、 Δ_d 是不确定参数矩阵，反映了系统模型中的参数不确定性， Δ_a 、 Δ_b 、 Δ_c 、 Δ_d 中的一些不确定参数可能是重复的； E_a 、 E_b 、 E_c 、 E_d 、 F_a 、 F_b 、 F_c 、 F_d 是适当维数的常数矩阵，它们反映了不确定参数是如何影响系统模型的，即反映了模型不确定性的结构。模型的不确定参数尽管是未知的，但总可以假定它们在某个有界的范围内变化。这个变化范围的大小直接影响到系统性能的确。特别地，通过对相关的系数矩阵乘上适当的尺度矩阵，可以将不确定矩阵的取值范围标准化，即 $\|\Delta_i\| \leq 1$, $i = a, b, c, d$ 。其中的范数取成矩阵的最大奇异值。

系统模型 (5.1.1) 可以写成

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + E_1 w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + E_2 w(t) \\ q(t) &= F_1 x(t) + F_2 u(t) \\ w(t) &= \Delta q(t)\end{aligned}\quad (5.1.3)$$

其中：

$$\begin{aligned}E_1 &= [E_a \ E_b \ 0 \ 0], \quad E_2 = [0 \ 0 \ E_c \ E_d] \\ F_1^T &= [F_a \ 0 \ F_c \ 0], \quad F_2^T = [0 \ F_b \ 0 \ F_d] \\ \Delta &= \text{diag}\{\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d\}, \quad \|\Delta\| \leq 1\end{aligned}$$

显然，模型 (5.1.3) 具有如图 5.1 所描述的线性分式模型形式。

5.2 鲁棒稳定性分析

考虑具有不确定参数的系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\delta)\mathbf{x}(t) \quad (5.2.1)$$

其中: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $\mathbf{A}(\delta)$ 是实值参数向量 $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_k]^T \in \mathbf{R}^k$ 的函数。假定不确定参数 δ 在一个给定的集合 \mathcal{A} 中取值, 则要研究的问题是: 给出系统 (5.2.1) 的鲁棒稳定性条件, 即在该条件下, 对所有不确定参数 $\delta \in \mathcal{A}$, 系统 (5.2.1) 都是渐近稳定的。

根据不确定参数 δ 是定常的还是时变的, 在时变的情况下是慢时变还是快时变的等不同情况, 系统 (5.2.1) 的鲁棒稳定性问题具有不同的处理方法。在不确定参数 δ 是定常未知的情况下, 系统 (5.2.1) 是一个线性时不变系统, 从而可以利用矩阵的特征值方法来研究其稳定性问题。当不确定参数 δ 是未知的时变函数时, 系统 (5.2.1) 就是一个时变系统, 研究时变系统稳定性问题的一种有效方法就是应用 Lyapunov 稳定性理论。

5.2.1 二次稳定性

对于具有时变不确定参数的系统, 引进以下的概念。

定义 5.2.1 二次稳定性

对系统 (5.2.1), 如果存在一个对称正定矩阵 \mathbf{P} , 使得对所有的不确定参数 $\delta \in \mathcal{A}$, 矩阵不等式

$$\mathbf{A}^T(\delta)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}(\delta) < \mathbf{0} \quad (5.2.2)$$

成立, 则系统 (5.2.1) 称为是二次稳定的。

若系统 (5.2.1) 是二次稳定的, 则由关系式 (5.2.2), 对任意的 $\delta \in \mathcal{A}$, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ 是系统 (5.2.1) 的一个二次型 Lyapunov 函数, 且满足

$$\dot{V} = \frac{dV(\mathbf{x}(t))}{dt} < 0$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 可得系统 (5.2.1) 是渐近稳定的。因此, 由系统 (5.2.1) 的二次稳定性, 可推出对所有不确定参数 $\delta \in \mathcal{A}$, 系统 (5.2.1) 是渐近稳定的, 即系统的鲁棒稳定性。但反之并不成立。因为, 二次稳定性要求对所有的不确定参数 $\delta \in \mathcal{A}$, 存在一个公共的 Lyapunov 矩阵 \mathbf{P} , 显然这样的要求是很高的。因此, 二次稳定性是一个保守的概念。尽管二次稳定性概念具有这样的保守性, 但其在处理参数不确定系统, 特别是具有时变不确定参数系统的鲁棒稳定性问题时仍然是非常有效的。

一般地, \mathcal{A} 是一个无穷集, 故定义 5.2.1 要求检验无穷多个矩阵不等式的可行性。显然, 这在具体系统的检验中是很难处理的。以下针对各种不确定模型的表示, 给出系统二

次稳定的有效检验方法。

首先考虑不确定参数的仿射依赖模型, 即矩阵 $A(\delta)$ 具有以下形式

$$A(\delta(t)) = A_0 + \delta_1(t)A_1 + \cdots + \delta_k(t)A_k \quad (5.2.3)$$

其中: A_0, \dots, A_k 是已知的 $n \times n$ 维实常数矩阵; 不确定参数 $\delta_i(t)$ 是任意的时变函数, 假定其是有界的, 且 $\delta_i(t) \in [\delta_i^-, \delta_i^+]$, $i = 1, \dots, k$ 。

定义顶点集

$$\Delta_0 = \{ \delta = [\delta_1, \dots, \delta_k]: \delta_i = \delta_i^- \text{ 或 } \delta_i^+, i = 1, \dots, k \}$$

则容易看到, 不确定参数的允许取值范围 Δ 是集合 Δ_0 的一个凸胞, 即由 Δ_0 中点的凸组合的全体所构成的集合。

定理 5.2.1 具有系统矩阵 (5.2.3) 的系统 (5.2.1) 是二次稳定的, 当且仅当存在一个对称正定矩阵 P , 使得对所有的 $\delta \in \Delta_0$, 矩阵不等式 (5.2.2) 成立。

证明 对任意固定的 $x \in \mathbf{R}^n$, 考虑映射 $f_x: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$

$$f_x(\delta) = x^T [A^T(\delta(t))P + PA(\delta(t))]x$$

由于 $A(\delta)$ 是 δ 的一个仿射函数, 故 $f_x(\delta)$ 是 δ 的一个凸函数。进而, 由于集合 Δ 中的任意 δ 都可以表示成集合 Δ_0 中一些点的一个凸组合, 因此对所有的 $\delta \in \Delta$, $f_x(\delta) < 0$, 当且仅当 $f_x(\delta) < 0$ 对所有的 $\delta \in \Delta_0$ 成立。由于 x 是任意的, 故从 $f_x(\delta) < 0$ 可推出矩阵不等式 (5.2.2)。定理得证。

集合 Δ 是一个无穷集, 而 Δ_0 则是一个有限集。定理 5.2.1 的好处在于只要在有限集 Δ_0 上检验矩阵不等式 (5.2.2) 是否成立就可以判断系统 (5.2.1) 的二次稳定性, 即用一组有限多个线性矩阵不等式构成的线性矩阵不等式系统的可行性刻画了系统 (5.2.1) 的二次稳定性条件, 而这一个线性矩阵不等式系统的可行性问题可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解, 从而提供了检验不确定参数仿射依赖模型二次稳定性的一种有效方法。

对由多胞型模型表示的不确定系统, 即系统矩阵具有以下形式:

$$A(\delta(t)) = \alpha_1(t)A_1 + \cdots + \alpha_k(t)A_k \quad (5.2.4)$$

其中: 对所有的 $t \in \mathbf{R}$, $\alpha_i(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i(t) = 1$, A_1, \dots, A_k 是给定的矩阵。类似于定理 5.2.1 的讨论, 可得以下结论。

定理 5.2.2 具有系统矩阵 (5.2.4) 的系统 (5.2.1) 是二次稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P , 使得对 $i = 1, \dots, k$, 矩阵不等式

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

成立。

从以上的讨论也可以看出, 不确定系统的参数仿射依赖模型和多胞型模型有着密切的关系。特别地, 仿射依赖模型可以转化成多胞型模型。

LMI 工具箱提供了检验由多胞型模型和参数仿射依赖模型所描述的不确定系统二次稳定性的函数 `quadstab`, 其一般表达式如下:

```
[t, P] = quadstab(sys, options)
```

其中的 sys 是系统的 SYSTEM 矩阵。当 options 省略时, t 是使得 $A(\delta) < \tau I$ 成立的 τ 的最小值。因此, 系统是二次稳定的, 当且仅当 $t < 0$, 且在 $t < 0$ 的情况下, P 就是使得矩阵不等式 (5.2.2) 成立的 Lyapunov 矩阵。

对参数仿射依赖模型, 函数 `quadstab` 还可以给出使得系统保持二次稳定的不确定参数的最大允许取值范围, 即最大二次稳定区域。对 $\delta_i(t) \in [\delta_i^-, \delta_i^+]$, 记 $\mu_i = \frac{1}{2}(\delta_i^- + \delta_i^+)$, $\lambda_i = \frac{1}{2}(\delta_i^+ - \delta_i^-)$, 则确定最大二次稳定区域的问题就是寻找一个最大的 θ , 使得对所有的 $\delta_i \in [\mu_i - \theta\lambda_i, \mu_i + \theta\lambda_i]$, 具有系统矩阵 (5.2.3) 的不确定系统 (5.2.1) 是二次稳定的。可以通过函数 `quadstab`, 并取 `options` 中的第 1 个分量等于 1 来求取 θ 的最大值。

例 5.2.1 考虑二阶系统

$$\dot{x} = A(k, f)x$$

其中:

$$A(k, f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{bmatrix}$$

$$k(t) \in [10, 12], f(t) \in [0.5, 0.7]$$

对给定的不确定参数允许变化范围, 要求确定该系统是否是二次稳定的, 且给出不确定参数的最大二次稳定范围。

以下程序给出了这个问题的解。

```
s0=ltisys([0 1;0 0])
s1=ltisys([0 0;-1 0],0)
s2=ltisys([0 0;0 -1],0)
pv=pvec('box',[10 12;0.5 0.7])
affsys=psys(pv,[s0 s1 s2])
[marg,P]=quadstab(affsys,[1 0 0])
```

得到的结果是 $\text{marg}=1.4904$,

$$P = \begin{bmatrix} 660.9784 & 13.5720 \\ 13.5720 & 60.0872 \end{bmatrix}$$

因此, 不确定参数的最大二次稳定区域是

$$k(t) \in [9.51, 12.49], f(t) \in [0.451, 0.749]$$

由 θ 的意义可知, 当 $\text{marg} \geq 1$ 时, 系统在原来的不确定参数允许变化范围中是二次稳定的。

对不确定参数在一个超长方体内变化的不确定系统, 尽管可以通过检验一组由有限多个线性矩阵不等式组成的线性矩阵不等式系统的可行性来判断该不确定系统的鲁棒稳定性问题。然而, 当不确定参数的数目增加时, 线性矩阵不等式的个数以指数形式增加, 这就

给计算带来了很大的负担。

以下讨论状态空间下线性分式模型的二次稳定性问题。考虑由图 5.1 描述的系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ q(t) &= Cx(t) + Dw(t) \\ w(t) &= \Delta(t)q(t)\end{aligned}\quad (5.2.5)$$

其中：系统的名义模型（即 $\Delta = 0$ 时）是线性时不变的， Δ 是模型中的不确定参数矩阵，它可以是时变的，且满足 $\|\Delta\| \leq 1$ ，即 $\Delta^T \Delta \leq I$ 。模型 (5.2.5) 也可以写成以下闭环的形式：

$$\dot{x}(t) = [A + B\Delta(I - D\Delta)^{-1}C]x(t)$$

记 $T(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ ，则线性分式模型 (5.2.5) 关于所有允许的不确定性是二次稳定的条件由以下定理给出。

定理 5.2.3 如果 $\|T(s)\|_\infty < 1$ ，即存在对称正定矩阵 P ，使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (5.2.6)$$

成立，则不确定系统 (5.2.5) 是二次稳定的。

证明 若存在对称正定矩阵 P ，使得矩阵不等式 (5.2.6) 成立，取 $V(x) = x^T Px$ ，则 $V(x)$ 是正定的，且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &= x^T(t)(PA + A^T P)x(t) + 2x^T(t)PBw(t) - w^T(t)w(t) + q^T(t)\Delta^T \Delta q(t)\end{aligned}$$

由于 $\Delta^T \Delta \leq I$ ，利用模型 (5.2.5)，从上式进一步可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x) &\leq \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + q^T(t)q(t) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

从条件 (5.2.6) 可推出 $\frac{d}{dt}V(x) < 0$ 。因此， $V(x)$ 是不确定系统 (5.2.5) 的一个 Lyapunov 函数，故系统是二次稳定的。定理得证。

以上定理说明了条件 $\|T(s)\|_\infty < 1$ 可以推出具有线性分式模型 (5.2.5) 的系统的二次稳定性。这一结果实际上也可以从小增益定理中得到。

Khargonekar 等 (1990) 证明了定理 5.2.3 的逆也是成立的。这说明了对于无结构的不确定性 Δ ，系统 (5.2.5) 是二次稳定的，当且仅当 $\|T(s)\|_\infty < 1$ 。这里考虑的不确定性 Δ 是无结构的，即对满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的任意不确定矩阵 Δ 。如果能够得到不确定矩阵 Δ 的一些结构信息，则可望进一步降低系统鲁棒稳定性条件的保守性。

由状态空间线性分式模型的导出, 可假定不确定矩阵 Δ 具有以下一般结构

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f\} \quad (5.2.7)$$

定义矩阵集

$$S = \left\{ \text{diag}\{S_1, \dots, S_s, s_1 I_{k_{s+1}}, \dots, s_f I_{k_{s+f}}\} : S_i \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, s_i \in \mathbb{R}, S_i > 0, s_i > 0 \right\}$$

则对任意具有形式 (5.2.7) 的不确定矩阵 Δ , 有

$$\Delta = S^{-1/2} \Delta S^{1/2}$$

因此, 系统 (5.2.5) 有以下等价的表示

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \hat{A}x(t) + \hat{B}\hat{w}(t) \\ \hat{q}(t) &= \hat{C}x(t) + \hat{D}\hat{w}(t) \\ \hat{w}(t) &= \Delta(t)\hat{q}(t) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S^{-1/2} \end{bmatrix}$$

根据定理 5.2.3, 系统 (5.2.8) 二次稳定的一个充分条件是 $\|\hat{T}(s)\|_\infty < 1$, 其中 $\hat{T}(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$ 。由于 $\hat{T} = S^{1/2}TS^{-1/2}$, 因此通过利用不确定矩阵的结构, 在不确定系统 (5.2.5) 的二次稳定性条件中引进了一个附加矩阵 $S \in S$ 。显然, 这样一个矩阵的引进可望进一步降低稳定性分析条件的保守性。

定义 5.2.2 对系统 (5.2.5), 如果存在一个矩阵 $S \in S$, 使得 $\|S^{1/2}TS^{-1/2}\|_\infty < 1$, 则系统 (5.2.5) 称为是 Q -稳定的。

$\|S^{1/2}TS^{-1/2}\|_\infty < 1$ 当且仅当存在一个对称正定矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PBS^{-1/2} \\ S^{-1/2}B^T P & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T S^{1/2} \\ S^{-1/2}D^T S^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{1/2}C & S^{1/2}DS^{-1/2} \end{bmatrix} < 0$$

对以上矩阵不等式的左边分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, S^{1/2}\}$, 可得到一个等价的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} S \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (5.2.9)$$

因此, 系统 (5.2.5) 为 Q -稳定的一个充分必要条件是存在对称正定矩阵 P 和 $S \in S$, 使得矩阵不等式 (5.2.9) 成立。

定理 5.2.3 在研究不确定系统的鲁棒性能分析和控制时还会经常遇到。

5.2.2 仿射二次稳定性

不确定系统的二次稳定性要求有一个对所有的不确定参数都适用的 Lyapunov 矩阵。

显然, 由此得到的稳定性条件具有很大的保守性。特别对慢时变的不确定参数来说, 这样的保守性尤为突出。如果用一个参数依赖的 Lyapunov 矩阵来替代二次稳定性中的单一 Lyapunov 矩阵, 进而导出系统稳定性的条件, 将有利于降低二次稳定性概念中由于采用一个单一的 Lyapunov 矩阵而引入的保守性。

针对参数仿射依赖模型 (5.2.1), 即 $A(\delta(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i(t) A_i$, 考虑参数依赖的二次型函数

$$V(x, \delta) = x^T P(\delta) x \quad (5.2.10)$$

其中的矩阵 $P(\delta)$ 是 δ 的一个矩阵值函数。为了处理上的方便, 假定矩阵 $P(\delta)$ 是不确定参数 δ 的一个仿射函数, 即

$$P(\delta) = P_0 + \delta_1 P_1 + \cdots + \delta_k P_k$$

其中: P_0, \dots, P_k 是已知的 $n \times n$ 维实对称矩阵。希望以二次型函数 $V(x, \delta)$ 作为系统 (5.2.1) 的一个 Lyapunov 函数来导出其稳定性条件。显然, 当 $P_1 = \cdots = P_k = 0$ 时, 这个参数依赖的 Lyapunov 函数就退化到二次稳定性处理中的 Lyapunov 函数。

定义 5.2.3 对系统 (5.2.1), 如果存在对称矩阵 P_0, \dots, P_k , 使得对所有的 $\delta \in \mathcal{A}$,

$$P(\delta) = P_0 + \delta_1 P_1 + \cdots + \delta_k P_k > 0 \quad (5.2.11)$$

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) + \frac{dP(\delta)}{dt} < 0 \quad (5.2.12)$$

则系统 (5.2.1) 称为是仿射二次稳定的。

对满足 (5.2.11) 和 (5.2.12) 的矩阵 $P(\delta)$, 由 (5.2.10) 式确定的函数 $V(x, \delta)$ 是正定的, 且 $dV(x(t))/dt < 0$ 。因此, 若系统 (5.2.1) 是仿射二次稳定的, 则它一定是鲁棒渐近稳定的。

根据定义 5.2.3, 要检验系统 (5.2.1) 的仿射二次稳定性, 必须对所有的 $\delta \in \mathcal{A}$, 检验矩阵不等式 (5.2.11) 和 (5.2.12) 的可行性。由于集合 \mathcal{A} 是一个无穷集, 这相当于要检验无穷多个矩阵不等式的可行性问题, 显然这是相当困难的。以下, 将主要讨论检验不确定系统仿射二次稳定性的有效检验方法。为此, 分别考虑时不变的不确定参数和时变不确定参数这两种情况。

时不变的不确定参数

若不确定参数 δ 是定常但未知的, 则 Lyapunov 矩阵 $P(\delta)$ 就不依赖时间 t , 故对任意的 $\delta \in \mathcal{A}$, $dP(\delta)/dt = 0$, 矩阵不等式 (5.2.12) 变成

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) < 0$$

设不确定集合 \mathcal{A} 是如二次稳定性问题研究中的一个超长方体, \mathcal{A}_0 是由集合 \mathcal{A} 的角点所组成的一个有限集。对任意给定的 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$f_x(\delta) = x^T [A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta)]x$$

由于矩阵 A 和 P 都是不确定参数 δ 的函数, 故一般地, $f_x(\delta)$ 不是 δ 的凸函数。因此, 并

不能由 $f_x(\delta)$ 在有限集 Δ_0 上的负定性推出 $f_x(\delta)$ 在集合 Δ 上的负定性。由于

$$\begin{aligned} L(\delta) &= A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) \\ &= [A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i]^T [P_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i P_i] + [P_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i P_i] [A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i A_i] \\ &= A_0^T P_0 + P_0 A_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i [A_i^T P_0 + P_0 A_i + A_0^T P_i + P_i A_0] \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{i-1} \delta_i \delta_j [A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i] + \sum_{i=1}^k \delta_i^2 [A_i^T P_i + P_i A_i] \end{aligned}$$

故对任意的 $\delta \in \Delta$,

$$f_x(\delta) = c_0 + \sum_{i=1}^k \delta_i c_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{i-1} \delta_i \delta_j c_{ij} + \sum_{i=1}^k \delta_i^2 d_i$$

其中:

$$\begin{aligned} c_0 &= x^T (A_0^T P_0 + P_0 A_0) x \\ c_i &= x^T (A_i^T P_0 + P_0 A_i + A_0^T P_i + P_i A_0) x \\ c_{ij} &= x^T (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) x \\ d_i &= x^T (A_i^T P_i + P_i A_i) x \end{aligned}$$

由于命题“对所有的 $\delta \in \Delta_0$, $f_x(\delta) < 0 \Rightarrow$ 对所有的 $\delta \in \Delta$, $f_x(\delta) < 0$ ”成立的一个充分条件是 $f_x(\delta_1, \dots, \delta_k)$ 关于其中的每一个变量 δ_i 都是凸的, 这等价于对 $i=1, \dots, k$,

$$d_i = \frac{\partial^2 f_x}{\partial \delta_i^2}(\delta) = x^T [A_i^T P_i + P_i A_i] x \geq 0$$

由 x 的任意性, 可进一步得到 $f_x(\delta)$ 是凸的充分条件是

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0, \quad i=1, \dots, k$$

总结以上的讨论, 可得定理 5.2.4。

定理 5.2.4 对系统 (5.2.1), 如果存在对称实矩阵 P_1, \dots, P_k , 使得对所有的 $\delta \in \Delta_0$,

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) < 0 \quad (5.2.13)$$

$$P(\delta) > 0 \quad (5.2.14)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0, \quad i=1, \dots, k \quad (5.2.15)$$

则系统 (5.2.1) 是仿射二次稳定的, 且 $V(x, \delta) = x^T P(\delta)x$ 是系统 (5.2.1) 的一个参数依赖二次 Lyapunov 函数。

定理 5.2.4 用一个线性矩阵不等式系统的可行性给出了参数不确定系统仿射二次稳定的条件。

时变不确定参数

如果不确定参数 δ 是时变的, 则还需要考虑 δ 的变化率。考虑以下的不确定参数集 Δ :

$$\Delta = \{ [\delta_1, \dots, \delta_k] : \text{对 } i=1, \dots, k, \delta_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 是一个可微函数, } \delta_i(t) \in [\delta_i^-, \delta_i^+], \dot{\delta}_i(t) \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+] \} \quad (5.2.16)$$

根据定义, 每一个 δ_i 都是有界的, 且它的变化率也是有界的。进一步, 定义角点集:

$$\Delta_0 = \{ [\delta_1, \dots, \delta_k] : \delta_i = \delta_i^- \text{ 或 } \delta_i^+, i=1, \dots, k \}$$

$$\Lambda_0 = \{ [\lambda_1, \dots, \lambda_k] : \lambda_i = \lambda_i^- \text{ 或 } \lambda_i^+, i=1, \dots, k \}$$

如果不确定参数是时不变的, 则对 $i=1, \dots, k$, $\lambda_i^- = \lambda_i^+ = 0$, Λ_0 仅仅是一个单点集。以下讨论就退化到上一小节的结论。

定理 5.2.5 设 (5.2.1) 是一个仿射参数依赖模型, 不确定参数集合 Δ 由 (5.2.16) 给出。如果存在实对称矩阵 P_0, \dots, P_k , 使得对所有的 $\delta \in \Delta_0$, $\lambda \in \Lambda_0$,

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) + P(\lambda) < P_0 \quad (5.2.17)$$

$$P(\delta) > I \quad (5.2.18)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0, \quad i=1, \dots, k \quad (5.2.19)$$

则系统 (5.2.1) 是仿射二次稳定的, 且 $V(x, \delta) = x^T P(\delta)x$ 是系统 (5.2.1) 的一个参数依赖的二次 Lyapunov 函数。

证明 对任意固定的 $\lambda \in \mathbf{R}^k$, 类似于定理 5.2.4 的讨论, 由矩阵不等式 (5.2.17) ~ (5.2.19) 可得对所有的 $\delta \in \Delta$,

$$P(\delta) > 0$$

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) + P(\lambda) - P_0 < 0$$

由于 $P(\lambda)$ 是 λ 的一个仿射函数, 故可得对所有的 $\delta \in \Delta$,

$$A^T(\delta)P(\delta) + P(\delta)A(\delta) + P(\dot{\delta}) - P_0 < 0$$

利用

$$\frac{dP(\delta)}{dt} = \dot{\delta}_1 P_1 + \dots + \dot{\delta}_k P_k = P(\dot{\delta}) - P_0$$

及定理 5.2.1 即可得证定理。

LMI 工具箱提供了函数 `pdlstab` 来处理仿射二次稳定性问题。对 $k=2$, 该函数的表示式为:

$$[t, Q_0, Q_1, Q_2] = \text{pdlstab}(\text{sys})$$

其中的 `sys` 是参数仿射依赖模型的 SYSTEM 矩阵。该函数的输出是参数依赖矩阵

$$Q(\delta) = Q_0 + \delta_1 Q_1 + \delta_2 Q_2$$

如果 $t < 0$ ，则所考虑的系统是仿射二次稳定的，且 $V(x, \delta) = x^T Q^{-1}(\delta)x$ 定义了一个参数依赖的 Lyapunov 函数。

例 5.2.2 再一次考虑二阶系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k(t) & -f(t) \end{bmatrix} x$$

其中：不确定参数 $k(t)$ 和 $f(t)$ 的变化范围是

$$k(t) \in [5, 10], f(t) \in [0.01, 0.1]$$

它们的变化率是有界的：

$$\left| \frac{dk}{dt} \right| < 0.01, \quad \left| \frac{df}{dt} \right| < 1$$

要求检验该系统的仿射二次稳定性。以下程序给出了系统的 SYSTEM 矩阵：

```
s0=ltisys([0 1;0 0])
s1=ltisys([0 0;-1 0],0)
s2=ltisys([0 0;0 -1],0)
pv=pvec('box',[5 10;0.01 0.1],[-0.01 0.01;-1 1])
ps=psys(pv,[s0 s1 s2])
```

由于

```
tmin=quadstab(ps)
```

给出的 $tmin=8.5014e-004$ ，故所考虑的系统在给定的不确定参数变化范围内不是二次稳定的。然而，

```
[tmin,Q0,Q1,Q2]=pdlstab(ps)
```

给出的 $tmin=-7.8288e-004 < 0$ ，故所考虑的系统在给定的不确定参数变化范围内是仿射二次稳定的。

这个例子表明了，在分析具有常数或慢时变不确定参数的系统稳定性时，函数 `pdlstab` 是一个更为有效的工具。

5.3 鲁棒性能分析

类似于第3章的讨论，本节将研究当存在系统模型的参数不确定性时，系统的鲁棒性能分析问题。

考虑系统模型：

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bp(t) + Kw(t) \\
 q(t) &= Cx(t) + Dp(t) + Lw(t) \\
 z(t) &= Mx(t) + Np(t) + Hw(t) \\
 p(t) &= \Delta(t)q(t)
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

其中: x 是系统的状态向量, w 是外部扰动, z 是被调输出, p 和 q 是描述模型不确定性 Δ 的外部信号, Δ 是模型不确定性, 可能是时变的, 具有形式:

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 I_{k_1}, \dots, \delta_s I_{k_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_f\} \tag{5.3.2}$$

且满足 $\|\Delta\| \leq 1$ 。

首先讨论系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_2 性能。第 3 章介绍的系统 H_2 性能是对线性时不变系统, 通过传递函数定义的。现在考虑的系统 (5.3.1) 由于存在可能时变的参数不确定性, 使得它成为一个时变系统, 因此不能再用传递函数的方式来定义系统 (5.3.1) 的 H_2 性能指标。

这一节主要考虑一下两类系统性能:

鲁棒 H_2 性能: 定义一个线性二次型 (LQ) 性能指标

$$\hat{J}_2(\Delta, w_0) = \|z\|_2^2 = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \tag{5.3.3}$$

其中的 z 是系统 (5.3.1) 在零初始条件和脉冲信号 $w(t) = w_0\delta(t)$ 激励下的被调输出。指标 (5.3.3) 反映了信号 z 的能量。系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_2 性能指标定义成

$$J_2 = \sup_{w_0, \Delta} \left\{ \hat{J}_2(\Delta, w_0) : \|w_0\| \leq 1, \Delta^T \Delta \leq I \right\}$$

即是最坏情况下的 LQ 性能指标值。

鲁棒 H_∞ 性能: 定义

$$\hat{J}_\infty(\Delta, w) = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt$$

其中: z 是系统 (5.3.1) 在零初始条件下有限能量扰动输入 w 的输出响应。则不确定系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_∞ 性能指标定义成

$$J_\infty = \sup_{w, \Delta} \left\{ \hat{J}_\infty(\Delta, w) : \|w\|_2 \leq 1, \Delta^T \Delta \leq I \right\}$$

即在所有允许的参数不确定性和有限能量外部扰动 w 中 $\hat{J}_\infty(\Delta, w)$ 的最坏可能值。

以下给出不确定系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_2 性能和鲁棒 H_∞ 性能的刻画以及这些性能指标的确定。

定理 5.3.1 以下两个条件是等价的:

(i) 不确定系统 (5.3.1) 是 Q -稳定的;

(ii) 存在对称正定矩阵 P 和矩阵 $S \in S$, 使得

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ M & N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ M & N \end{bmatrix} < 0 \tag{5.3.4}$$

若以上条件成立, 则当 $L=0$ 、 $H=0$ 时, 系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_2 性能指标 J_2 是有限的, 并且

$$J_2 < \|K^T P K\|$$

证明 由于系统 (5.3.1) Q -稳定当且仅当存在对称正定矩阵 \bar{P} 和 $\bar{S} \in S$, 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}A + A^T \bar{P} & \bar{P}B \\ B^T \bar{P} & -\bar{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \bar{S} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0$$

故必存在一个充分小的标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}A + A^T \bar{P} & \bar{P}B \\ B^T \bar{P} & -\bar{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} \bar{S} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} M^T \\ N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} < 0$$

上式两边乘以 ε^{-1} , 并记 $P = \varepsilon^{-1} \bar{P}$, $S = \varepsilon^{-1} \bar{S}$, 即可得到矩阵不等式 (5.3.4)。这就证明了 (i) 和 (ii) 的等价性。

在系统 (5.3.1) 中, 取 $w(t) = w_0 \delta(t)$, $x(0) = 0$, 记 Φ 是矩阵不等式 (5.3.4) 左边的矩阵式。考虑 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$, 则对系统 (5.3.4) 的任意非零轨线 $x(t)$, $p(t)$, 有 $v^T \Phi v < 0$, 其中 $v^T = [x \ p]$ 。由此可得

$$\dot{V}(x(t)) < p^T(t) S p(t) - q^T(t) S q(t) - z^T(t) z(t)$$

可以看到, $x(0) = 0$ 和 $w(t) = w_0 \delta(t)$ 等价于 $x(0) = K w_0$ 和 $w(t) = 0$, 在上式两边对 t 从 0 到 ∞ 积分, 并利用系统的稳定性可得: 对任意允许的不确定性,

$$w_0^T (K^T P K) w_0 > \int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt + \int_0^\infty [q^T(t) S q(t) - p^T(t) S p(t)] dt$$

对任意的 $S \in S$ 和具有结构 (5.3.2) 的不确定矩阵 Δ ,

$$p^T(t) S p(t) - q^T(t) S q(t) = q^T(t) (\Delta^T S \Delta - S) q(t) \leq 0$$

故当 $\|w_0\| \leq 1$ 时,

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 dt < \|K^T P K\|$$

定理得证。

定理 5.3.2 以下两个条件是等价的:

- (i) 不确定系统 (5.3.1) 是 Q -稳定的;
- (ii) 存在对称正定矩阵 P , 矩阵 $S \in S$ 和一个标量 $\gamma > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & PK \\ B^T P & -S & 0 \\ K^T P & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T & M^T \\ D^T & N^T \\ L^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D & L \\ M & N & H \end{bmatrix} < 0 \quad (5.3.5)$$

若以上条件成立, 则不确定系统 (5.3.1) 的鲁棒 H_∞ 性能指标是有界的, 且

$$J_\infty < \gamma$$

证明 根据 Finsler 定理, 存在 $\gamma > 0$, 使得矩阵不等式 (5.3.5) 成立, 当且仅当存在

对称正定矩阵 P 和矩阵 $S \in S$ 满足矩阵不等式 (5.3.4)。从定理 5.3.1 可得条件 (i) 和 (ii) 是等价的。

考虑系统 (5.3.1) 中的信号 x, p, w , 记 $\zeta^T = [x \ p \ w]$, Ψ 表示矩阵不等式 (5.3.5) 左边的矩阵式, 则对 $\zeta \neq 0$, 从不等式 (5.3.5) 可得 $\zeta^T \Psi \zeta < 0$ 。展开该不等式, 并利用系统方程及 $S \in S$, 得到

$$2x^T(t)Px(t) + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < p^T(t)Sp(t) - q^T(t)Sq(t) \leq 0$$

故

$$\frac{d}{dt} [x^T(t)Px(t)] + z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0$$

在上式两边对 t 从 0 到 ∞ 积分, 利用零初始条件和系统的稳定性, 得到

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt < \gamma^2 \int_0^\infty w^T(t)w(t)dt$$

此即为所要的系统 H_∞ 性能界。定理得证。

5.4 鲁棒 H_2/H_∞ 控制

本节对同时具有模型参数不确定性和外部扰动的一类系统, 研究其鲁棒 H_2/H_∞ 控制问题。对系统的 H_2/H_∞ 控制问题, 在 4.3 节中通过用同一个 Lyapunov 矩阵来同时满足闭环系统的 H_2 和 H_∞ 性能条件给出了一种解决方法, 但这种方法由于采用了一个公共的 Lyapunov 矩阵, 使得所导出的结果具有一定的保守性。

这一节首先介绍关于处理模型参数不确定性的一个结论, 这个结论在后续章节中也将常常被用到。然后基于线性矩阵不等式, 通过建立和求解一个凸优化问题, 给出不确定系统鲁棒 H_2/H_∞ 控制的一种具有更小保守性的求解方法。

5.4.1 问题的描述和准备

考虑由以下状态方程描述的不确定离散系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A + \Delta A)x(k) + (B_1 + \Delta B_1)u(k) + B_2 w(k) \\ z_0(k) &= C_0 x(k) + D_0 u(k) \\ z_1(k) &= C_1 x(k) + D_1 u(k) \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w(k) \in \mathbb{R}^p$ 是外部扰动输入, $z_0(k) \in \mathbb{R}^q$ 、 $z_1(k) \in \mathbb{R}^r$ 是被调输出, A 、 B_1 、 B_2 、 C_0 、 C_1 、 D_0 和 D_1 是描述名义系统模型的已知实常数矩阵, ΔA 和 ΔB_1 是反映系统模型中参数不确定性的未知实矩阵, 假定其是范数且有界的, 且具有以下形式:

$$[\Delta A \ \Delta B_1] = HF[E_1 \ E_2] \quad (5.4.2)$$

上式中的 $F \in \mathbb{R}^{n \times j}$ 是一个满足

$$F^T F \leq I \quad (5.4.3)$$

的不确定矩阵, H 、 E_1 和 E_2 是已知的常数矩阵, 反映了不确定参数的结构信息。

本节要研究的问题是对给定的标量 $\gamma > 0$, 设计一个状态反馈控制律

$$u(k) = Kx(k) \quad (5.4.4)$$

使得对所有允许的参数不确定性, 闭环系统满足以下的设计指标:

(1) 闭环系统是渐近稳定的;

(2) 当 $w(k)$ 被看成是一个有限能量的扰动信号时, 从 $w(k)$ 到 $z_1(k)$ 的闭环传递函数 $T(z)$ 满足

$$\|T(z)\|_\infty < \gamma \quad (5.4.5)$$

其中: $\|G(z)\|_\infty = \sup_{0 \leq \omega \leq 2\pi} \sigma_{\max}[G(e^{j\omega})]$, $\sigma_{\max}(\cdot)$ 表示一个矩阵的最大奇异值;

(3) 当 $w(k)$ 被看成是一个具有单位谱密度的白噪声信号时, 要求性能指标

$$J(K) = \sup_F \lim_{t \rightarrow \infty} E\{z_0^T(k)z_0(k)\} \leq \bar{J}(K) \quad (5.4.6)$$

其中: $\bar{J}(K)$ 是一个确定的常数, 它表示了闭环系统最坏情况下的 H_2 性能指标值的一个上界, 式中的 $E\{\cdot\}$ 表示矩阵的期望算子。

满足以上设计指标的控制律 (5.4.4) 称为是系统 (5.4.1) 的一个鲁棒 H_2/H_∞ 保性能控制律。一般地, $\bar{J}(K)$ 依赖于所选取的控制律。使得 $\bar{J}(K)$ 最小化的控制律 (5.4.1) 称为是系统 (5.4.1) 的鲁棒 H_2/H_∞ 最优保性能控制律。

应用控制律 (5.4.4), 得到如下的闭环系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}_c x(k) + B_2 w(k) \\ z_0(k) &= C_{0c} x(k) \\ z_1(k) &= C_{1c} x(k) \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

其中: $\bar{A}_c = A_c + HFE_c$, $C_{0c} = C_0 + D_0 K$, $C_{1c} = C_1 + D_1 K$, $A_c = A + B_1 K$, $E_c = E_1 + E_2 K$ 。

如果 \bar{A}_c 是渐近稳定的, 则 $J_0(K)$ 能被表示成

$$J_0(K) = \sup_F \text{Trace}\{B_2^T \tilde{P} B_2\} \quad (5.4.8)$$

其中: $\tilde{P} = \tilde{P}^T \geq 0$ 是由以下的离散时间 Lyapunov 方程

$$\bar{A}_c^T \tilde{P} \bar{A}_c - \tilde{P} + C_{0c}^T C_{0c} = 0 \quad (5.4.9)$$

确定的矩阵。

在以下主要结论的导出中, 需要处理系统矩阵中包含的参数不确定性。为此, 首先介绍以下的一个引理。为了本书的完整性, 我们给出这个重要引理的证明。

引理 5.4.1 给定适当维数的矩阵 Y 、 D 和 E , 其中 Y 是对称的, 则

$$Y + DFE + E^T F^T D^T < 0$$

对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon D D^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$$

为了证明这个引理, 首先给出以下一些结论。

引理 5.4.2 设 $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, D 和 E 是适当维数的常数矩阵, 则对任意满足 $F^T F \leq I$ 的适当维数矩阵 F , 有

$$2x^T D F E y \leq \varepsilon^T D D^T x + \frac{1}{\varepsilon} y^T E^T E y \quad (5.4.10)$$

成立, 其中的 ε 是任意正标量。

证明 从

$$\begin{aligned} 0 &\leq (D^T x - F E y)^T (D^T x - F E y) \\ &= x^T D D^T x - 2x^T D F E y + y^T E^T F^T F E y \\ &\leq x^T D D^T x - 2x^T D F E y + y^T E^T E y \end{aligned}$$

可得证所要的矩阵不等式 (5.4.10)。在以上最后一个不等式的导出中, 应用了条件 $F^T F \leq I$ 。引理得证。

引理 5.4.3 对给定的任意向量 $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, 有

$$\max \{ (x^T F y)^2 : F \in \mathbb{R}^{p \times q}, F^T F \leq I \} = (x^T x)(y^T y) \quad (5.4.11)$$

证明 设 $F \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 是任意给定的满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵, 根据 Schwarz 不等式, 有

$$|x^T F y| \leq \sqrt{(x^T x)(y^T F^T F y)}$$

因此,

$$(x^T F y)^2 \leq (x^T x)(y^T F^T F y) \leq (x^T x)(y^T y)$$

另一方面, 取

$$\tilde{F} = \frac{xy^T}{\sqrt{x^T x} \sqrt{y^T y}}$$

则

$$x^T \tilde{F} y = \frac{x^T xy^T y}{\sqrt{x^T x} \sqrt{y^T y}} = \sqrt{x^T x} \sqrt{y^T y}$$

即 $(x^T F y)^2$ 在 \tilde{F} 处达到上界 $(x^T x)(y^T y)$, 故等式 (5.4.11) 成立。引理得证。

从引理的证明过程中, 还可以发现所构造的矩阵 \tilde{F} 满足 $\tilde{F}^T \tilde{F} = I$ 。故也可以得到以下的结论:

$$\max \{ (x^T F y)^2 : F \in \mathbb{R}^{p \times q}, F^T F = I \} = (x^T x)(y^T y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q \quad (5.4.12)$$

引理 5.4.4 设 X 、 Y 和 Z 是给定的 $k \times k$ 阶实对称矩阵, 满足 $X > 0$, 且

(i) 对所有非零向量 $x \in \mathbb{R}^k$, $\delta(x) = (x^T Y x)^2 - 4(x^T X x)(x^T Z x) > 0$;

(ii) 对使得 $\mathbf{x}^T \mathbf{Z} \mathbf{x} \geq 0$ 的所有非零向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{x}^T \mathbf{Y} \mathbf{x} < 0$ 。

则存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\mathbf{M}(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y} + \mathbf{Z} \leq \mathbf{0} \quad (5.4.13)$$

证明 由于 $\mathbf{X} > \mathbf{0}$, 故不失一般性, 可假定 $\mathbf{X} = \mathbf{I}$; 否则, 可以进行变换 $\mathbf{z} = \mathbf{X}^{1/2} \mathbf{x}$, 把问题转化到 $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ 的情况 (可以看到在这样的变换下, \mathbf{Y} 和 \mathbf{Z} 的对称性以及条件 (i) 和 (ii) 均不变)。

若引理结论不成立, 即对每一个常数 $\lambda > 0$, 总存在非零向量 $\mathbf{x}(\lambda) \in \mathbf{R}^k$, 使得

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 [\mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{X} \mathbf{x}(\lambda)] + \lambda [\mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda)] + \mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Z} \mathbf{x}(\lambda) > 0 \quad (5.4.14)$$

可以证明总能选取适当的 $\mathbf{x}(\lambda)$, 使得存在某个常数 $\lambda_0 < 0$, $\mathbf{x}(\lambda)$ 是 (λ_0, ∞) 上的关于 λ 的连续函数, 且 $\|\mathbf{x}(\lambda)\| = 1$, (5.4.14) 式成立。

由于对每个 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\delta(\mathbf{x}) > 0$, 因此

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda) &= \frac{1}{2} [-\mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda) - \sqrt{\delta(\mathbf{x}(\lambda))}] \\ \rho_2(\lambda) &= \frac{1}{2} [-\mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda) + \sqrt{\delta(\mathbf{x}(\lambda))}] \end{aligned} \quad (5.4.15)$$

是实值函数, 且对每一个 $\lambda > 0$, $\rho_2(\lambda) > \rho_1(\lambda)$ 。进而, 由 $\mathbf{x}(\lambda)$ 的连续性可以推出映射 $\lambda \mapsto \rho_1(\lambda)$ 和 $\lambda \mapsto \rho_2(\lambda)$ 在区间 (λ_0, ∞) 上的连续性。从 (5.4.14) 和 (5.4.15) 式得到, 对所有 $\lambda > 0$,

$$(\lambda - \rho_1(\lambda))(\lambda - \rho_2(\lambda)) > 0 \quad (5.4.16)$$

由式 (5.4.16) 可得: 对任意给定的 $\lambda^* > 0$, 必须有 $\lambda^* < \rho_1(\lambda^*) < \rho_2(\lambda^*)$ 或 $\lambda^* > \rho_1(\lambda^*) > \rho_2(\lambda^*)$ 。

如果对某个 $\lambda^* > 0$, $\lambda^* < \rho_1(\lambda^*) < \rho_2(\lambda^*)$, 则对所有的 $\lambda > 0$, $\lambda - \rho_1(\lambda) < 0$; 否则, 由 $\lambda - \rho_1(\lambda) < 0$ 在区间 (λ_0, ∞) 上的连续性以及连续函数的中值定理, 式 (5.4.16) 不可能对所有的 $\lambda > 0$ 成立, 根据 $\rho_1(\lambda)$ 的定义以及 $\|\mathbf{x}(\lambda)\| = 1$, 对所有 $\lambda > 0$,

$$\lambda + \frac{1}{2} \lambda_m(\mathbf{Y}) \leq \lambda + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda) < \lambda + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda) + \sqrt{\delta(\mathbf{x}(\lambda))} < 0$$

显然, $\lambda + \frac{1}{2} \lambda_m(\mathbf{Y}) < 0$ 不可能对所有 $\lambda > 0$ 成立, 矛盾。

如果对某个 $\lambda^* > 0$, $\lambda^* > \rho_1(\lambda^*) > \rho_2(\lambda^*)$, 则类似前面的讨论, 可得对所有 $\lambda > 0$, $\lambda - \rho_2(\lambda) > 0$ 。因此, 对所有 $\lambda > 0$,

$$2\lambda + \mathbf{x}^T(\lambda) \mathbf{Y} \mathbf{x}(\lambda) > \sqrt{\delta(\mathbf{x}(\lambda))}$$

上式两边令 $\lambda \rightarrow 0$, 则得到

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{Y} \mathbf{x}_0 \geq \sqrt{\delta(\mathbf{x}_0)} \quad (5.4.17)$$

其中: $\mathbf{x}_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbf{x}(\lambda) \neq \mathbf{0}$ (注意到 $\mathbf{x}(\lambda)$ 在 (λ_0, ∞) 上连续, 故这个极限存在)。从不等式 (5.4.14) 和 (5.4.17) 可知, 这样的非零向量 \mathbf{x}_0 满足 $\mathbf{x}_0^T \mathbf{Y} \mathbf{x}_0 > 0$, $\mathbf{x}_0^T \mathbf{Z} \mathbf{x}_0 \geq 0$ 。显然, 这和

条件(ii)矛盾。

综合以上证明得到：存在常数 $\lambda > 0$ ，使得 (5.4.16) 成立。

引理 5.4.5 设 X 、 Y 和 Z 是给定的 $k \times k$ 阶实对称矩阵，满足 $X \geq 0$ ，且对使得 $x^T Z x \geq 0$ 的所有非零向量 $x \in \mathbb{R}^k$ ：

$$(i) \quad x^T Y x < 0$$

$$(ii) \quad \delta(x) = (x^T Y x)^2 - 4(x^T X x)(x^T Z x) > 0$$

则存在常数 $\lambda > 0$ ，使得

$$M(\lambda) = \lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0 \quad (5.4.18)$$

证明 若 $Z < 0$ ，即 $\lambda_M(Z) < 0$ ，此时容易证明总找到适当的 $\lambda > 0$ （充分小），使得 (5.4.18) 式成立。

以下考虑 $\lambda_M(Z) \geq 0$ ，我们证明存在一个常数 $\varepsilon > 0$ ，使得对称矩阵 $\bar{X} = X + \varepsilon I$ 、 Y 和 Z 满足引理 5.4.4 的所有条件。事实上，由条件 (ii) 可得

$$\mu = \min\{\delta(x) : \|x\| = 1, x^T Z x \geq 0\} > 0 \quad (5.4.19)$$

选取 $\varepsilon > 0$ ，以使得

$$4\lambda_M(Z)\varepsilon < \mu \quad (5.4.20)$$

由于 $\mu > 0$ ， $\lambda_M(Z) \geq 0$ ，故这样的正数 ε 总是存在的。考虑

$$\bar{\delta}(x) = (x^T Y x)^2 - 4(x^T \bar{X} x)(x^T Z x) \quad (5.4.21)$$

由于 $X \geq 0$ ， $\varepsilon > 0$ ，故 $\bar{X} = X + \varepsilon I$ 是正定的。因此，对所有使得 $x^T Z x < 0$ 的非零向量 $x \in \mathbb{R}^k$ ， $\bar{\delta}(x) > 0$ 。另一方面，从式 (5.4.19) ~ (5.4.21)，可知对使得 $x^T Z x \geq 0$ 的所有非零向量 x ，

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(x) &= \delta(x) - 4\varepsilon(x^T x)(x^T Z x) \\ &\geq \delta(x) - 4\varepsilon\lambda_M(Z)(x^T x)^2 \\ &\geq (\mu - 4\varepsilon\lambda_M(Z))(x^T x)^2 \end{aligned}$$

由此推出引理 5.4.4 的条件满足，根据引理 5.4.4，存在常数 $\lambda > 0$ ，使得

$$\lambda^2(X + \varepsilon I) + \lambda Y + Z \leq 0$$

即

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z \leq -\varepsilon\lambda^2 I < 0$$

结论得证。

以下给出引理 5.4.1 的证明。

条件的充分性可由引理 5.4.2 推出，以下证明条件的必要性。由引理条件的不等式，可得对任意适当维数的向量 ξ ，

$$\xi^T Y \xi + 2\xi^T H F E \xi < 0$$

根据引理 5.4.3，由上式可得

$$\xi^T Y \xi + 2\sqrt{\xi^T D D^T \xi} \sqrt{\xi^T E^T E \xi} < 0$$

即

$$\xi^T Y \xi < -2\sqrt{\xi^T D D^T \xi} \sqrt{\xi^T E^T E \xi}$$

因此,

$$(\xi^T Y \xi)^2 < 4(\xi^T D D^T \xi)(\xi^T E^T E \xi)$$

记 $X = D D^T$, $Z = E^T E$, 应用引理 5.4.5 可得所要证明的结论。

5.4.2 H_2/H_∞ 控制器设计

定理 5.4.1 对给定的常数 $\gamma > 0$ 和闭环系统 (5.4.7), \bar{A}_c 渐近稳定, 且 $\|T(z)\|_\infty < \gamma$ 当且仅当存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\bar{A}_c^T \bar{P} \bar{A}_c - \bar{P} + \bar{A}_c^T \bar{P} B_2 (\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T \bar{P} B_2)^{-1} B_2^T \bar{P} \bar{A}_c + \alpha^{-1} C_{1c}^T C_{1c} + C_{0c}^T C_{0c} < 0 \quad (5.4.22)$$

有一个正定解矩阵 P , 且使得 $\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T \bar{P} B_2 > 0$ 。进而, 对这样的解矩阵 P , 有

$$0 \leq \tilde{P} \leq P \quad (5.4.23)$$

其中: $\tilde{P} = \tilde{P}^T \geq 0$ 是 Lyapunov 方程 (5.4.9) 的解矩阵。

证明 从第 3 章给出的离散时间系统有界实引理: 矩阵 \bar{A}_c 渐近稳定, 且 $\|T(z)\|_\infty < \gamma$ 当且仅当存在满足矩阵不等式

$$\bar{A}_c^T \bar{P} \bar{A}_c - \bar{P} + \bar{A}_c^T \bar{P} B_2 (\gamma^2 I - B_2^T \bar{P} B_2)^{-1} B_2^T \bar{P} \bar{A}_c + C_{1c}^T C_{1c} < 0 \quad (5.4.24)$$

的对称正定矩阵 \bar{P} , 且使得 $\gamma^2 I - B_2^T \bar{P} B_2 > 0$ 。

(5.4.24) 式等价于存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\bar{A}_c^T \bar{P} \bar{A}_c - \bar{P} + \bar{A}_c^T \bar{P} B_2 (\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T \bar{P} B_2)^{-1} B_2^T \bar{P} \bar{A}_c + C_{1c}^T C_{1c} + \alpha C_{0c}^T C_{0c} < 0 \quad (5.4.25)$$

在上式两边分别乘以正常数 α^{-1} , 并记 $P = \alpha^{-1} \bar{P}$, 则 $P > 0$, 且满足 $\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T P B_2 > 0$ 和矩阵不等式 (5.4.22)。由此即得证定理的第一部分。

进而, 假定矩阵不等式 (5.4.22) 有一个对称正定解矩阵 P , 且满足 $\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T P B_2 > 0$ 。记

$$M = \bar{A}_c^T P B_2 (\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T P B_2)^{-1} B_2^T P \bar{A}_c + \alpha^{-1} C_{1c}^T C_{1c}$$

则 $M \geq 0$ 。(5.4.22) 式减去 (5.4.9) 式, 可得

$$\bar{A}_c^T (P - \tilde{P}) \bar{A}_c - (P - \tilde{P}) + M < 0$$

由 $M \geq 0$, \bar{A}_c 的稳定性及 Lyapunov 稳定性理论可得: $P - \tilde{P} \geq 0$, 即 $\tilde{P} \leq P$ 。定理得证。

矩阵不等式 (5.4.22) 包含了参数不确定矩阵, 要检验其是否对所有允许的不确定矩阵成立仍然是一件困难的事。为了克服这一困难, 以下应用引理 5.4.1 将定理 5.4.1 的条件转化成一个等价的线性矩阵不等式的可行性问题, 从而可以应用 LMI 工具箱所提供的线性矩阵不等式求解器来有效地检验定理 5.4.1 的条件。

定理 5.4.2 存在常数 $\alpha > 0$ 和一个对称正定矩阵 P , 使得矩阵不等式 (5.4.22) 和 $\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T P B_2 > 0$ 对所有允许的参数不确定性成立; 当且仅当存在常数 $\alpha, \beta > 0$ 和对称正定矩阵 X , 使得

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & XA_c^T & XE_c^T & XC_{lc}^T & XC_{0c}^T \\ 0 & -\alpha\gamma^2 I & \alpha B_2^T & 0 & 0 & 0 \\ A_c X & \alpha B_2 & -X + \beta H H^T & 0 & 0 & 0 \\ E_c X & 0 & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ C_{lc} X & 0 & 0 & 0 & -\alpha I & 0 \\ C_{0c} X & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.4.26)$$

证明 根据矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (5.4.22) 和 $\gamma^2 \alpha^{-1} I - B_2^T P B_2 > 0$ 成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} -P + \alpha^{-1} C_{lc}^T C_{lc} + C_{0c}^T C_{0c} & 0 & \bar{A}_c^T \\ 0 & -\alpha^{-1} \gamma^2 I & B_2^T \\ \bar{A}_c & B_2 & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.4.27)$$

记

$$Y = \begin{bmatrix} -P + \alpha^{-1} C_{lc}^T C_{lc} + C_{0c}^T C_{0c} & 0 & A_c^T \\ 0 & -\alpha^{-1} \gamma^2 I & B_2^T \\ A_c & B_2 & -P^{-1} \end{bmatrix}$$

根据 $\bar{A}_c = A_c + H F E_c$, (5.4.27) 式可以等价地写成

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \end{bmatrix}^T F^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}^T < 0$$

由引理 5.4.1, 上式对所有满足 $F^T F \leq I$ 的不确定矩阵 F 成立当且仅当存在常数 $\beta > 0$, 使得

$$Y + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & H^T \end{bmatrix} + \beta^{-1} \begin{bmatrix} E_c^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_c & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0$$

进一步应用 Schur 补性质, 并代入矩阵 Y 的表达式, 上式可等价地表示成

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & A_c^T & E_c^T & C_{lc}^T & C_{0c}^T \\ 0 & -\alpha^{-1} \gamma^2 I & B_2^T & 0 & 0 & 0 \\ A_c & B_2 & -P^{-1} + \beta H H^T & 0 & 0 & 0 \\ E_c & 0 & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ C_{lc} & 0 & 0 & 0 & -\alpha I & 0 \\ C_{0c} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, \alpha I, I, I, I, I\}$, 并记 $X = P^{-1}$, 即可得矩阵不等式 (5.4.26)。定理得证。

定理 5.4.1 和定理 5.4.2 证明了如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得矩阵不等式 (5.4.26) 有一个对称正定解矩阵 X , 则对所有允许的参数不确定性, 闭环系统 (5.4.7) 是渐近稳定的, 且被调输出 $z_1(k)$ 满足给定的扰动抑制约束。进而, 这个正定解矩阵 X 保证了性能指标 $J(K)$ 满足

$$J(K) \leq \bar{J}(K) \quad (5.4.28)$$

其中:

$$\bar{J}(K) = \text{Trace}(B_2^T X^{-1} B_2)$$

以下定理进一步给出了使得闭环系统渐近稳定, 且满足给定的扰动衰减度和性能约束 (5.4.28) 的保性能控制律设计方法。

定理 5.4.3 对给定的常数 $\gamma > 0$ 和系统 (5.4.1), 存在一个保性能控制律 (5.4.4) 当且仅当存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 以及对称正定矩阵 X 和矩阵 V , 使得

$$\begin{bmatrix} -X & 0 & (AX+B_1V)^T & (E_1X+E_2V)^T & (C_1X+D_1V)^T & (C_0X+D_0V)^T \\ 0 & -\alpha\gamma^2 I & \alpha B_2^T & 0 & 0 & 0 \\ AX+B_1V & \alpha B_2 & -X+\beta HH^T & 0 & 0 & 0 \\ E_1X+E_2V & 0 & 0 & -\beta I & 0 & 0 \\ C_1X+D_1V & 0 & 0 & 0 & -\alpha I & 0 \\ C_0X+D_0V & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.4.29)$$

进而, 如果 (5.4.29) 有一个可行解 α, β, X, V , 则状态反馈控制律

$$u(k) = VX^{-1}x(k) \quad (5.4.30)$$

是系统 (5.4.1) 的一个保性能控制律, 且闭环系统的一个 H_2 保性能上界是 $\bar{J}(K) = \text{Trace}(B_2^T X^{-1} B_2)$ 。

证明 根据定理 5.4.1 和 5.4.2, 在 (5.4.26) 式中定义 $V = KX$, 即可得证本定理。

矩阵不等式 (5.4.29) 是一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式。如果该线性矩阵不等式是可行的, 则可以用 `feasp` 提供的可行解按 (5.4.30) 式构造所求的保性能控制律。定理 5.4.3 提供了用线性矩阵不等式 (5.4.29) 的可行解表示的一组保性能控制律。因此, 可以进一步利用这一参数化表示来设计满足一些其他附加要求的保性能控制律。特别地, 我们将基于这一参数化表示, 提出鲁棒 H_2/H_∞ 最优保性能控制律的设计方法。

定理 5.4.4 对给定的常数 $\gamma > 0$ 和系统 (5.4.1), 如果以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\alpha, \beta, X, V, N} \quad & \text{Trace}(N) \\ \text{s.t.} \quad & \text{(i) (5.4.29)} \end{aligned} \quad (5.4.31)$$

$$(ii) \begin{bmatrix} -N & B_2^T \\ B_2 & -X \end{bmatrix} < 0$$

有一个解 α, β, X, V, N ，则 $u(k) = VX^{-1}x(k)$ 是系统 (5.4.1) 的 H_2/H_∞ 最优保性能控制律。

证明 根据定理 5.4.3，利用问题 (5.4.31) 的任意可行解构造得到的控制律 (5.4.30) 将保证闭环系统满足设计条件 (a) 和 (b)，并且闭环系统的 H_2 性能指标值满足 $J(K) \leq \text{Trace}(B_2^T X^{-1} B_2)$ 。进而，从矩阵的 Schur 补性质，问题 (5.4.31) 的约束条件 (ii) 等价于 $B_2^T X^{-1} B_2 < N$ 。因此， $\text{Trace}(N)$ 的最小化将保证性能上界 $J(K, X^{-1})$ 的最小化。约束条件和目标函数的凸性保证了如果问题 (5.4.31) 有解，则一定是该问题的全局最优解。定理得证。

问题 (5.4.31) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题，因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

以下通过一个例子来说明以上提出的保性能控制律设计方法的有效性。

例 5.4.1 考虑不确定离散系统 (5.4.1)，其中：

$$A = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ -0.50 & 0.50 & 2.00 \\ -0.75 & -1.00 & -1.50 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [1 \ 1 \ 1], \quad D_0 = 1$$

$$C_1 = [-1 \ 1 \ 0], \quad D_1 = 0.5$$

$$H = [0.25 \ -0.50 \ 0.75]^T, \quad E_1 = [0 \ 0.50 \ 1.00], \quad E_2 = 0$$

给定 $\gamma = 10$ ，应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 可得相应的优化问题 (5.4.31) 是可行的。根据定理 5.4.4 可以得到所考虑系统的 H_2/H_∞ 最优保性能控制律

$$u(k) = [0.96 \ 0.78 \ 0.63]x(k)$$

对所有允许的参数不确定性，闭环系统关于被调输出 $z_0(k)$ 的 H_2 性能指标满足 $J(K) \leq 22.12$ ，被调输出 $z_1(k)$ 满足 $\|T_{wz_1}(z)\|_\infty < 10$ 。

进一步，对不同的扰动抑制度 γ ，重复以上的步骤，可以得到相应的 H_2/H_∞ 最优保性能控制律。图 5.6 所示的曲线给出了在不同的扰动抑制度 γ 下所得到的闭环系统 H_2 最优保性能指标值和扰动抑制度 γ 间的关系。该曲线表明了系统的 H_2 保性能指标值随着扰动抑制度 γ 的增加而减小。

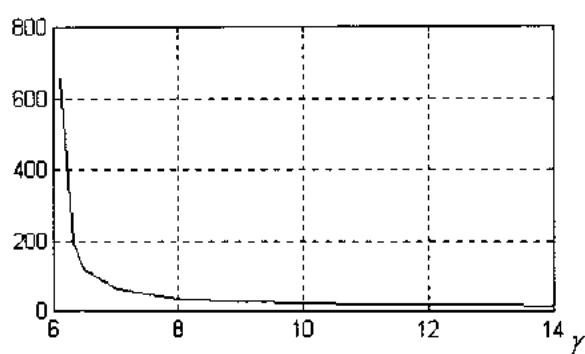


图 5.6 H_2 保性能指标值和扰动抑制度 γ 间的关系

第6章 区域极点配置

在控制理论与实践中的一个基本问题是设计反馈控制律，将闭环系统的极点配置在所期望的位置上，以保证闭环系统具有所要求的动态和稳态性能。在最初的极点配置问题研究中，考虑的是精确的极点配置问题，即将闭环极点配置在复平面中事先给定的位置。然而，由于模型的不精确性和各种扰动的存在，使得这样一种精确极点配置的控制方式不可能得到真正的实现。

事实上，只要将闭环系统的极点配置在复平面上的一个适当区域中，就可以保证系统具有一定的动态和稳态特性。例如，具有极点 $\lambda = \zeta\omega_n \pm j\omega_d$ 的一个二阶系统的阶跃响应可以由自然频率（或无阻尼振荡频率） $\omega_n = |\lambda|$ 、阻尼比（或相对阻尼系数） ζ 和阻尼自然频率 ω_d 完全确定。通过将 λ 限制在复平面上的一个适当区域中，可以保证 ζ 、 ω_n 和 ω_d 满足一些给定的界，从而保证系统具有所期望的过渡过程特性。例如，考虑如图 6.1 中阴影部分所示的区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 。

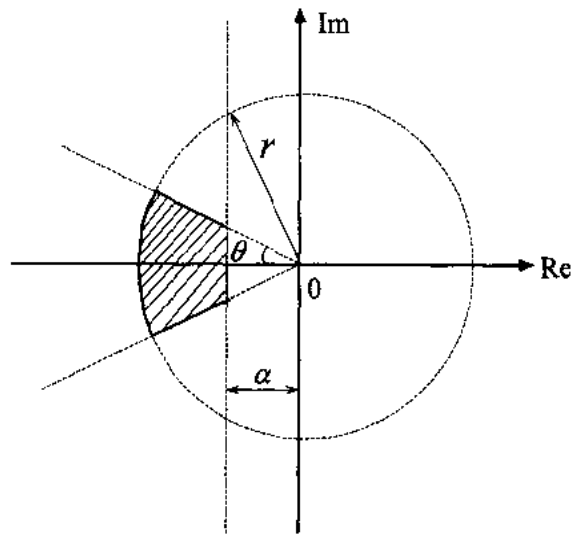


图 6.1 区域 $S(\alpha, r, \theta)$

这样一个区域可以用以下的集合来刻画：

$$S(\alpha, r, \theta) = \{ x + jy \in \mathbb{C} : x < -\alpha, |x + jy| < r, x \tan \theta < -|y| \}$$

其中： $\alpha > 0$ ， r, θ 是给定的。将闭环极点配置在区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 中，可以保证系统具有最小衰减度 α 、最小阻尼比 $\zeta = \cos \theta$ 和一个最大自然频率 $\omega_n = r \sin \theta$ ，这将进一步保证系统的一些诸如最大超调、衰减时间、上升时间、调节时间等过渡过程指标不超过由 ζ 和 ω_n 确

定的上界。

对控制系统的设计,一些感兴趣的区域有:保证状态响应具有衰减度 α 的半平面 $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(s) \leq -\alpha\}$ ($\alpha > 0$)、垂直条状区域、圆盘、扇形区域等。Gutman 和 Jury (1981) 针对一类相当一般的区域和一个给定的正方矩阵,用含有一个矩阵变量的矩阵方程的可行性给出了该矩阵的所有特征值均在所考虑区域中的充分必要条件。尽管这一结果是相当完整的,但所涉及的矩阵方程往往是非线性的,甚至是很复杂的。这给系统极点位置的分析,特别是系统区域极点配置问题的求解带来了很大的困难。

本章将介绍一类可以用一个线性矩阵不等式刻画区域,称为 LMI 区域。可以证明:一个矩阵的特征值均在这样一个 LMI 区域中的充分必要条件是一个适当的线性矩阵不等式是可行的,从而可以借助求解线性矩阵不等式的有效方法来方便地求解系统极点的分析和区域极点配置问题。

6.1 LMI 区域

6.1.1 LMI 区域的描述

这一节将给出 LMI 区域的定义和一些 LMI 区域的例子。

定义 6.1.1 对复平面中的区域 D , 如果存在一个对称矩阵 $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和矩阵 $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得

$$D = \{s \in \mathbb{C}: L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (6.1.1)$$

则称 D 是一个线性矩阵不等式区域(简记为 LMI 区域)。矩阵值函数

$$f_D(z) = L + sM + \bar{s}M^T \quad (6.1.2)$$

称为 LMI 区域 D 的特征函数。

特征函数 $f_D(z)$ 的取值是 $m \times m$ 维的埃尔米特矩阵 (Hermitian matrix), $f_D(z) < 0$ 表示矩阵 $f_D(z)$ 是负定的。

由定义 6.1.1 可以看到复平面上的一个 LMI 区域就是某个以 s 和 \bar{s} 为变量的线性矩阵不等式, 或者以 $x = \operatorname{Re}(s)$ 和 $y = \operatorname{Im}(s)$ 为变量的线性矩阵不等式的可行域。根据引理 2.1.1, 这样的 LMI 区域是凸的。进而, 对任意的 $s \in D$, $f_D(\bar{s}) = \overline{f_D(s)} < 0$, 故 $\bar{s} \in D$ 。因此, LMI 区域关于复平面上的实轴是对称的。

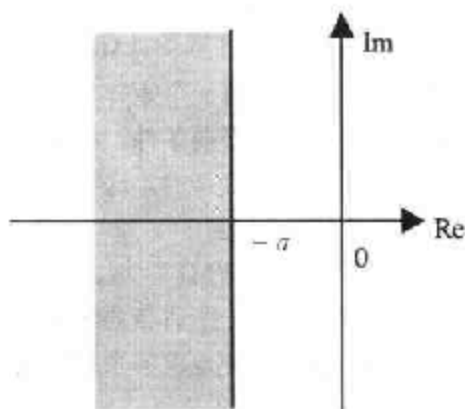
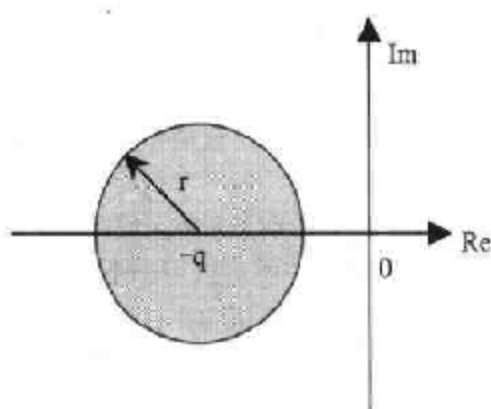
以下列举一些典型的 LMI 区域。

例 6.1.1 左半开复平面 \mathbb{C}^- 是一个 LMI 区域, 相应的特征函数是

$$f_{\mathbb{C}^-}(s) = s + \bar{s} \quad (6.1.3)$$

更一般地, 如图 6.2 中阴影部分所示的半平面 $D_\alpha = \{s \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}(s) < -\alpha\}$ 也是一个 LMI 区域, 它的特征函数是:

$$f_{D_\alpha}(s) = 2\alpha + s + \bar{s}$$

图 6.2 区域 D_α 图 6.3 区域 $D(r, q)$

例 6.1.2 如图 6.3 所示的复平面上半径为 r ，中心在 $(-q, 0)$ 的圆盘 $D(r, q)$ 是一个 LMI 区域。因为 $D(r, q)$ 可以表示成

$$D(r, q) = \{s \in \mathbb{C}: (s+q)(\bar{s}+q) - r^2 < 0\}$$

由 $r > 0$ 可推出: $(s+q)(\bar{s}+q) - r^2 < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -r & q+s \\ q+\bar{s} & -r \end{bmatrix} < 0$$

因此,

$$f_{D(r,q)}(s) = \begin{bmatrix} -r & q+s \\ q+\bar{s} & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.1.4)$$

是区域 $D(r, q)$ 的一个具有形式 (6.1.2) 的特征函数, 即区域 $D(r, q)$ 是一个 LMI 区域。

特别地, 当 $q=0, r=1$ 时, 可得中心在原点的单位圆盘也是一个 LMI 区域, 相应的特征函数是

$$f_{D(1,0)}(s) = \begin{bmatrix} -1 & s \\ \bar{s} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{s} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.1.5)$$

例 6.1.3 考虑由图 6.4 中阴影部分所示的区域 D_{cs} :

$$D_{cs} = \left\{ s = x + jy: x, y \in \mathbb{R}, \operatorname{tg} \theta < -\frac{|y|}{x} \right\}$$

容易验证 D_{cs} 是一个 LMI 区域, 且它的特征函数是

$$f_{D_{cs}}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(s + \bar{s}) & \cos \theta(s - \bar{s}) \\ \cos \theta(s - \bar{s}) & \sin \theta(s + \bar{s}) \end{bmatrix} \quad (6.1.6)$$

例 6.1.4 如图 6.5 所示的垂直条形区域 $D_{vs} = \{s \in \mathbb{C}: h_1 < \operatorname{Re}(s) < h_2\}$ 是一个 LMI 区

域, 它的特征函数是

$$f_{D_{\infty}}(s) = \begin{bmatrix} 2h_1 - (s + \bar{s}) & 0 \\ 0 & (s + \bar{s}) - 2h_2 \end{bmatrix}$$

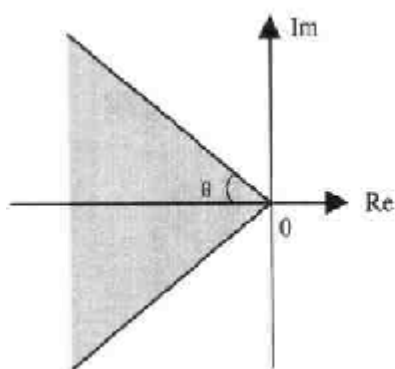


图 6.4 区域 D_{∞}

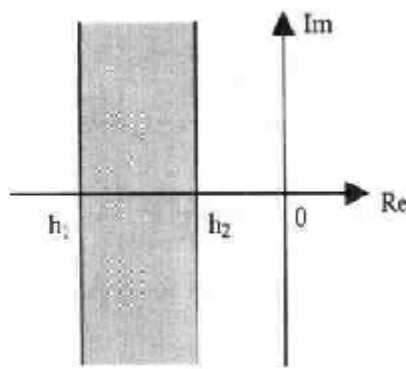


图 6.5 区域 D_{ν}

对给定的两个 LMI 区域 D_1 和 D_2 , 假定它们的特征函数分别是 f_{D_1} 和 f_{D_2} , 利用集合运算的性质容易证明: 两个区域的交 $D = D_1 \cap D_2$ 也是一个 LMI 区域, 且其特征函数是

$$f_D = \text{diag}\{f_{D_1}, f_{D_2}\}$$

进一步, 任意有限多个 LMI 区域 D_1, D_2, \dots, D_k 的交也是一个 LMI 区域。由这一性质可以得到一些更为复杂的 LMI 区域。例如, 图 6.6 中的阴影部分所表示的关于实轴对称的凸多边形区域 (A, B, C, D, E, F, G) 是一个 LMI 区域。

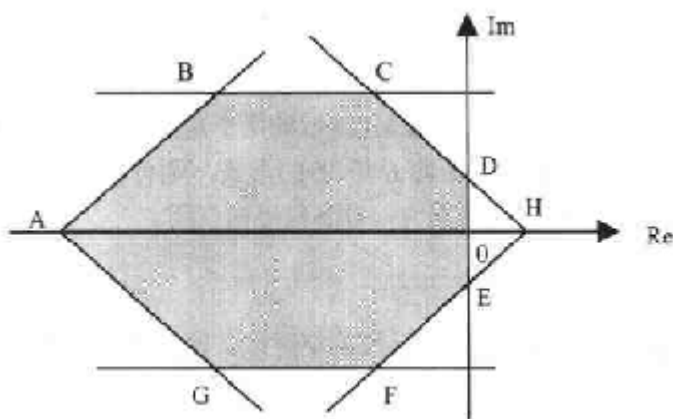


图 6.6 凸多边形区域

因为它可以表示成直线 (D, E) 的左半平面、直线 (B, C) 和 (G, F) 围成的水平条状区域、直线 (A, B) 和 (C, H) 的下半平面、直线 (A, G) 和 (F, H) 的上半平面这五个 LMI 区域的交。更一般地, 任意一个关于实轴对称的凸多边形均是 LMI 区域。

由于任意一个凸区域都可以用一个凸多边形来近似, 而且这样的近似可以达到任意需要的精度。因此, 所有 LMI 区域全体构成了关于实轴对称的凸区域全体的一个稠子集。根据这个结论, 对控制中感兴趣的凸区域 (实系统的极点总是以共轭的形式出现, 因此控

制系统设计所考虑的凸区域总可以假定是关于实轴对称的), 总可以找到一个 LMI 区域来近似, 而且这样的近似可以达到任意需要的精度。

LMI 工具箱提供了一个函数 `lmireg` 来确定所需要的 LMI 区域。`lmireg` 的一般表达式如下:

```
region=lmireg
region=lmireg(reg1,reg2,...)
```

`lmireg` 具有对话式的功能, 在输入 `region = lmireg` 后, 屏幕中会出现:

Select a region among the following:

```
h) Half-plane
d) Disk
c) Conic sector
e) Ellipsoid
p) Parabola
s) Horizontal strip
m) Matrix description of the LMI region
q) Quit
choice:
```

通过输入所选择区域的代码, 提示你输入所选择区域的各种参数:

```
region=[L, M]
```

L 和 M 分别是 (6.1.1) 式中刻画 LMI 区域的两个矩阵 L 和 M 的变量名。如果我们能够直接知道刻画 LMI 区域的两个矩阵 L 和 M 的形式, 则可以通过直接输入 `region = [L, M]`, 将该区域以名字 `region` 存在机器内, 以备需要时调用。

```
region=lmireg(reg1,reg2,...)
```

则给出了 `reg1`、`reg2`、... 等多个 LMI 区域的交区域。输出是刻画这个 LMI 交区域的矩阵 L 和 M 。

6.1.2 D-稳定性分析

上一小节给出了复平面上的一类特殊区域——LMI 区域的定义和刻画。现在将讨论一个正方矩阵的所有特征值均在某个给定 LMI 区域中的条件。

定义 6.1.2 对复平面中给定的 LMI 区域 D 和矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 如果矩阵 A 的所有特征值都位于区域 D 中, 即 $\sigma(A) \subset D$, 则称矩阵 A 是 D-稳定的。

在以下的讨论中, 矩阵的 Kronecker 乘积起着重要的作用。对两个给定的矩阵

$A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $B \in \mathbf{R}^{p \times q}$, 矩阵 A 和 B 的 Kronecker 乘积是一个分块矩阵

$$A \otimes B = (a_{ij} B) \in \mathbf{R}^{np \times mq}$$

利用矩阵的运算, 可以得到矩阵 Kronecker 乘积的以下性质:

1. $I \otimes A = A$;
2. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;
3. $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$;
4. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
5. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;
6. $\sigma(A \otimes B) = \{ \lambda(A)\lambda(B) : \lambda(A) \in \sigma(A), \lambda(B) \in \sigma(B) \}$.

其中: A 、 B 、 C 和 D 是适当维数的矩阵, 在性质 5 中, 假定矩阵的逆都存在。

以下的定理给出了矩阵 A 是 D-稳定的判别准则。

定理 6.1.1 给定由 (6.1.1) 式描述的 LMI 区域 D , 则矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是 D-稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得

$$M_D(A, X) < 0 \quad (6.1.7)$$

其中:

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T \quad (6.1.8)$$

在给出这个定理的证明之前, 首先证明一个引理。

引理 6.1.1 设 $X \in \mathbf{C}^{n \times n}$ 是一个埃尔米特正定矩阵, 则它的实部 $\text{Re}(X)$ 是一个对称正定矩阵。

证明 从 $X = \text{Re}(X) + j\text{Im}(X)$ 和 $X = X^H$, 可得

$$\text{Re}(X) + j\text{Im}(X) = [\text{Re}(X)]^T - j[\text{Im}(X)]^T \quad (6.1.9)$$

因此, $\text{Re}(X) = [\text{Re}(X)]^T$, $\text{Im}(X) = -[\text{Im}(X)]^T$, 即 $\text{Re}(X)$ 是对称的, $\text{Im}(X)$ 是反对称的。

对任意非零向量 $v \in \mathbf{R}^n$, 由 $\text{Im}(X)$ 的反对称性可得 $v^T \text{Im}(X)v = 0$ 。据此, 由式 (6.1.9) 可得 $v^T Xv = v^T \text{Re}(X)v$, 由矩阵 X 的正定性可推出 $v^T \text{Re}(X)v > 0$ 。引理得证。

定理 6.1.1 的证明:

充分性 假定存在对称矩阵 X , 满足矩阵不等式系统 (6.1.7)。设 λ 是矩阵 A 的任意特征值, $v \in \mathbf{C}^n$ 是使得 $v^H A = \lambda v^H$ 的非零向量。应用矩阵 Kronecker 乘积的性质, 可得

$$\begin{aligned} & (I \otimes v^H) M_D(A, X) (I \otimes v) \\ &= (I \otimes v^H) [L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^T] (I \otimes v) \\ &= L \otimes (v^H X v) + M \otimes (v^H A X v) + M^T \otimes (v^H (AX)^T v) \\ &= v^H X v (L + \lambda M + \bar{\lambda} M^T) \\ &= v^H X v f_D(\lambda) \end{aligned}$$

由 $M_D(A, X) < 0$ 和 $X > 0$ 可推出 $f_D(\lambda) < 0$, 即 $\lambda \in D$ 。由 $\lambda \in \sigma(A)$ 的任意性, 根据定义 6.1.2, 可得矩阵 A 是 D -稳定的。

必要性 假设矩阵 A 是 D -稳定的, 要证明存在一个实对称正定矩阵 X , 使得 $M_D(A, X) < 0$ 。为此, 将函数 $M_D(A, X)$ 的定义域推广到复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (AX) + M^T \otimes (AX)^H$$

首先考虑 A 是对角矩阵 $\Delta = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 的情形, 其中 $\lambda_i \in D$ 。应用矩阵 Kronecker 乘积的定义和矩阵的初等变换, 可得

$$\begin{aligned} M_D(\Delta, I) &= L \otimes I + M \otimes \Delta + M^T \otimes \Delta^H \\ &= U^T \text{diag}\{f_D(\lambda_1), \dots, f_D(\lambda_n)\} U \end{aligned}$$

其中的 U 是一些两行交换的初等矩阵的乘积。由 $\lambda_i \in D$, 推出 $f_D(\lambda_i) < 0$ 。因此, $X = I$ 就是使得 $M_D(\Delta, X) < 0$ 成立的一个实对称正定矩阵。

对一般的情形, 设 Δ 是由矩阵 A 的 n 个特征值所构成的对角矩阵 (重特征值的个数以它在特征多项式中的重数计算)。根据前面的讨论, 有 $M_D(\Delta, I) < 0$ 。

考虑矩阵 A 的约当标准型, 总可以构造一个可逆的矩阵序列 $\{T_k\}$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{-1} A T_k = \Delta$ (例如对 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 可以取 $T_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$)。由于 $M_D(Y, I)$ 是 Y 的一个连续函数, 故

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_D(T_k^{-1} A T_k, I) = M_D(\Delta, I) < 0$$

因此, 存在充分大的 k , 使得 $M_D(T_k^{-1} A T_k, I) < 0$ 。记 $T = T_k$, 则

$$\begin{aligned} & (I \otimes T) M_D(T^{-1} A T, I) (I \otimes T^H) \\ &= (I \otimes T) [L \otimes I + M \otimes (T^{-1} A T) + M^T \otimes (T^{-1} A T)^H] (I \otimes T^H) \\ &= L \otimes (T T^H) + M \otimes (A T T^H) + M^T \otimes (A T T^H)^H \\ &= M_D(A, T T^H) \end{aligned}$$

结合 $M_D(T^{-1} A T, I) < 0$, 可得 $M_D(A, T T^H) < 0$, 即 $X = T T^H > 0$ 是使得 $M_D(A, X) < 0$ 的一个解。

以上得到的 $X = T T^H$ 未必是一个实矩阵, 而根据引理 6.1.1, $\text{Re}(X) > 0$ 。对实矩阵 A ,

$$\begin{aligned} M_D(A, X) &= L \otimes [\text{Re}(X) + j \text{Im}(X)] + M \otimes [A(\text{Re}(X) + j \text{Im}(X))] \\ &\quad + M^T \otimes [A(\text{Re}(X) + j \text{Im}(X))]^H \\ &= M_D(A, \text{Re}(X)) + j[L \otimes \text{Im}(X) + M \otimes (A \text{Im}(X)) - M^T \otimes (A \text{Im}(X))^T] \end{aligned}$$

因此,

$$\text{Re}[M_D(A, X)] = M_D(A, \text{Re}(X))$$

根据引理 6.1.1, 从 $M_D(A, X) < 0$ 可推出 $\text{Re}[M_D(A, X)] < 0$, 由上式进一步可得

$$M_D(A, \text{Re}(X)) < 0$$

因此, $\text{Re}(X) > 0$ 是所要求的实对称正定矩阵。定理得证。

注意到式 (6.1.8) 中的矩阵 $M_D(A, X)$ 可以在区域 D 的特征函数 $f_D(z)$ 中作如下对应的代入 $(1, z, \bar{z}) \leftarrow (X, AX, (AX)^T)$ 得到。

另外, $M_D(A, X)$ 是关于矩阵变量 X 的一个线性矩阵不等式, 从而可以应用线性矩阵不等式的有关求解方法来判定线性矩阵不等式系统 (6.1.7) 的可行性, 并得到矩阵 A 是否是 D -稳定的解。

结合前面各个例子中给出的 LMI 区域, 应用定理 6.1.1, 来具体看一下矩阵 A 的所有特征值均在这些 LMI 区域中的条件。

对于左半开复平面, 其特征函数是 $f_D(s) = s + \bar{s}$, 则 $M_D(A, X) = 1 \otimes (XA) + 1 \otimes (A^T X) = XA + A^T X$ 。根据定理 6.1.1, 矩阵 A 的所有特征值均在左半开复平面中的充分必要条件是存在对称正定矩阵 X , 使得

$$AX + XA^T < 0$$

这正好是连续型的 Lyapunov 不等式。

矩阵 A 的所有特征值均在半径为 r , 中心在 $(-q, 0)$ 的圆盘中的充分必要条件是存在对称矩阵 X , 使得

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + AX \\ qX + XA^T & -rX \end{bmatrix} < 0$$

特别地, 矩阵 A 的所有特征值均在以原点为中心的单位圆盘中的充分必要条件是存在对称矩阵 X , 使得

$$\begin{bmatrix} -X & AX \\ XA^T & -X \end{bmatrix} < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 上式等价于

$$\begin{cases} AXA^T - X < 0 \\ X > 0 \end{cases}$$

这正好是离散型的 Lyapunov 不等式。

利用定理 6.1.1, 可以推出一个矩阵的所有特征值同时在几个 LMI 区域中的问题可以转化成具有同一变量 X 的一个 LMI 系统的可行性问题, 并且这样的结论不含任何保守性。这就是以下的推论。

推论 6.1.1 给定两个 LMI 区域 D_1 和 D_2 , 矩阵 A 同时是 D_1 -稳定和 D_2 -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X , 使得

$$M_{D_1}(A, X) < 0, \quad M_{D_2}(A, X) < 0$$

证明 设 f_{D_1} 和 f_{D_2} 分别是 LMI 区域 D_1 和 D_2 的特征函数, 则 $\text{diag}\{f_{D_1}, f_{D_2}\}$ 就是 LMI 区域 $D_1 \cap D_2$ 的特征函数。因此,

$$M_{D_1 \cap D_2}(A, X) = \text{diag}\{M_{D_1}(A, X), M_{D_2}(A, X)\}$$

应用定理 6.1.1, 即可得到推论的结论。

例 6.1.5 考虑图 6.1 中表示的区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 。由于这个区域可以看成是一个具有 α -稳定度的半平面区域 D_α 、一个圆盘和一个圆锥扇形 $S(0, 0, \theta)$ 这三个 LMI 区域的交, 因此根据推论 6.1.1, 矩阵 A 的所有特征值均在区域 $S(\alpha, r, \theta)$ 中的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X , 使得

$$\begin{aligned} AX + XA^T + 2\alpha X &< 0 \\ \begin{bmatrix} -rX & AX \\ XA^T & -rX \end{bmatrix} &< 0 \\ \begin{bmatrix} \sin\theta(AX + XA^T) & \cos\theta(AX - XA^T) \\ \cos\theta(XA^T - AX) & \sin\theta(AX + XA^T) \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

6.2 具有闭环区域极点约束的状态反馈控制器设计

考虑由以下状态方程描述的线性时不变系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_1(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{22} u(t) \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $w(t) \in \mathbf{R}^q$ 是外部扰动输入, $z_1(t) \in \mathbf{R}^1$, $z_2(t) \in \mathbf{R}^2$ 是系统的被调输出, 这一节将讨论系统 (6.2.1) 具有 H_2/H_∞ 性能要求和闭环区域极点约束的状态反馈控制器设计问题。

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则对状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \quad (6.2.2)$$

相应的闭环系统是:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_2 K)x(t) + B_1 w(t) \\ z_1(t) &= (C_1 + D_{12} K)x(t) + D_{11} w(t) \\ z_2(t) &= (C_2 + D_{22} K)x(t) \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

记 $T_{wz_1}(s)$ 是从扰动信号 w 到 z_1 的闭环传递函数矩阵, $T_{wz_2}(s)$ 是从扰动信号 w 到 z_2 的闭环传递函数矩阵, 则系统的设计目标及其刻画分别如下。

- H_∞ 性能: 对给定的正常数 γ , $\|T_{wz_1}(s)\|_\infty < \gamma$ 。根据有界实引理, 系统 (6.2.3) 具有这一性质当且仅当存在一个对称正定矩阵 X_1 , 使得

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)X_1 + X_1(A+B_2K)^T & B_1 & X_1(C_1+D_{12}K)^T \\ B_1^T & -\mathcal{H} & D_{11}^T \\ (C_1+D_{12}K)X_1 & D_{11} & -\mathcal{H} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.2.4)$$

- H_2 性能: 对给定的正常数 η , $\|T_{wz_2}(s)\|_2 < \eta$ 。根据第 4 章得到的分析结论, 如果存在对称矩阵 X_2 和 Q , 使得

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)X_2 + X_2(A+B_2K)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.2.5)$$

$$\begin{bmatrix} Q & (C_2+D_{22}K)X_2 \\ X_2(C_2+D_{22}K)^T & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (6.2.6)$$

$$\text{Trace}(Q) < \eta^2 \quad (6.2.7)$$

则 $\|T_{wz_2}(s)\|_2 < \eta$ 。

- 极点配置: 要求闭环极点位于一个给定的 LMI 区域

$$D = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (6.2.8)$$

其中: $L = L^T$ 和 M 是给定的实矩阵。根据定理 6.1.1, 这一性能要求得以满足的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X_3 , 使得

$$L \otimes X_3 + M \otimes [(A+B_2K)X_3] + M^T \otimes [(A+B_2K)X_3]^T < 0 \quad (6.2.9)$$

因此, 对系统 (6.2.1) 设计控制律 (6.2.2), 使得闭环系统同时满足以上给定的 H_∞ 性能、 H_2 性能和闭环极点约束的多目标控制问题可以通过求解具有变量 X_1 、 X_2 、 X_3 、 Q 和 K 的矩阵不等式系统 (6.2.4) ~ (6.2.7)、(6.2.9) 来解决。容易看到不等式系统 (6.2.4) ~ (6.2.7)、(6.2.9) 关于变量 X_1 、 X_2 、 X_3 、 Q 、 K 不是凸的。一般来说, 要解决这个非凸矩阵不等式系统的可行性问题仍然是困难的。为了便于处理, 可以通过寻找一个公共的 Lyapunov 矩阵

$$X = X_1 = X_2 = X_3 \quad (6.2.10)$$

来解决这里遇到的困难。进一步引进变量替换 $Y = KX$, 则这样一个多目标控制问题可以通过建立和求解如下的凸优化问题来解决:

$$\min_{\gamma, X, Y, Q} \alpha\gamma + \beta \text{Trace}(Q) \quad (6.2.11)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + B_2Y + Y^TB_2^T & B_1 & XC_1^T + Y^TD_{12}^T \\ B_1^T & -\mathcal{H} & D_{11}^T \\ C_1X + D_{12}Y & D_{11} & -\mathcal{H} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Q & C_2X + D_{22}Y \\ XC_2^T + Y^TD_{22}^T & X \end{bmatrix} > 0$$

$$L \otimes X + M \otimes (AX + B_2Y) + M^T \otimes (AX + B_2Y)^T < 0$$

$$\text{Trace}(\mathbf{Q}) < \eta_0^2$$

$$\gamma < \gamma_0$$

其中: γ_0 、 η_0 、 α 和 β 是设计者给定的参数。如果 $(\gamma^*, \mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*, \mathbf{Q}^*)$ 是该优化问题的最优解, 则所求的状态反馈控制律是

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{Y}^* (\mathbf{X}^*)^{-1} \mathbf{x}(t) \quad (6.2.12)$$

该状态反馈控制律保证了闭环系统的极点均在由 (6.2.8) 式确定的 LMI 区域 D 中, 并且

$$\begin{aligned} \|T_{w_1}(s)\|_\infty &\leq \gamma^* \\ \|T_{w_2}(s)\|_2 &\leq \sqrt{\text{Trace}(\mathbf{Q}^*)} \end{aligned}$$

问题 (6.2.11) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

在以上问题的处理中, 由于要求刻画各个系统性能指标的 Lyapunov 矩阵都相同, 为原来的多目标控制问题增加了附加约束, 得到的控制律 (6.2.12) 未必是全局最优的多目标控制律。另外, 即使问题 (6.2.11) 无解, 但并不能就此推出原来的多目标控制问题无解。因此, 约束条件 (6.2.10) 的引进带来了一定的保守性。

通过选取设计参数 γ_0 、 η_0 、 α 和 β 的不同值, 可以解决不同目标的设计问题。例如设 N 是一个很大的正数, 则

1. 取 $\gamma_0 = \eta_0 = N$, $\alpha = \beta = 0$, 对应于单一的极点配置问题;
2. 取 $\gamma_0 = \eta_0 = N$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 对应于具有闭环极点约束的最优 H_∞ 控制问题;
3. 取 $\gamma_0 = \eta_0 = N$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 对应于具有闭环极点约束的最优 H_2 控制问题;
4. 取 $\gamma_0 = g$, $\eta_0 = N$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 对应于在闭环极点约束和 $\|T_{w_1}(s)\|_\infty < g$ 约束下, 使得 $\|T_{w_2}(s)\|_2$ 最小化的问题;
5. $\gamma_0 = N$, $\eta_0 = h$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 对应于在闭环极点约束和 $\|T_{w_2}(s)\|_2 < h$ 约束下, 使得 $\|T_{w_1}(s)\|_\infty$ 最小化的问题。

LMI 工具箱提供了求解问题 (6.2.11) 的一个函数 msfsyn, 它的一般表达式是:

```
[gopt, h2opt, K, Pcl, X] = msfsyn(P, r, obj, region, tol)
```

其中:

- P 是对象的系统矩阵, 它可以是时不变的单一模型, 也可以是不确定模型的多胞型描述或参数依赖描述, $r(1)$ 表示被调输出 z_2 的维数, $r(2)$ 表示控制输入 \mathbf{u} 的维数;
- $\text{obj} = [\gamma_0, \eta_0, \alpha, \beta]$ 是一个确定设计目标的向量, 它的取值和对应的设计目标分别如表 6.1 所示。

表 6.1 参数的取值及对应的设计目标

obj	Corresponding Design
[0 0 0 0]	pole placement only
[0 0 1 0]	H_∞ -optimal design
[0 0 0 1]	H_2 -optimal design
[g 0 0 1]	minimize $\ T_2\ _2$ subject to $\ T_v\ _\infty < g$
[0 h 1 0]	minimize $\ T_v\ _1$ subject to $\ T_2\ _2 < h$
[0 0 a b]	minimize $a\ T_v\ _\infty^2 + b\ T_2\ _2^2$

- **region** 确定了所考虑的 LMI 区域，它的默认区域是左半开复平面。可以使用命令 **lmireg** 来产生所要的区域 **region**，如果知道刻画所考虑的 LMI 区域的矩阵 **L** 和 **M**，则也可以通过输入 **region = [L, M]** 来直接确定 **region**；
- **tol** 是描述精度的指标，默认即可。

在输出中，**gopt** 和 **h2opt** 分别是闭环系统的 H_∞ 和 H_2 性能指标，**K** 是所求的状态反馈增益矩阵，**Pcl** 是从 w 到 $[z_1^T \ z_2^T]^T$ 的闭环传递函数，**X** 是 Lyapunov 矩阵。

在 LMI 工具箱中提供了一个示例来说明本节提出的方法。只要在 MATLAB 命令窗口中输入 **sateldem** 就可以浏览这个例子。

6.3 鲁棒 D-稳定性分析

前面讨论了对一个给定的 LMI 区域 D ，线性时不变系统的 D-稳定性分析和状态反馈 D-稳定化控制器的设计问题。由于实际系统中不可避免地存在不确定性，因此有必要研究不确定系统的鲁棒 D-稳定性分析和综合问题。

考虑不确定线性系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\Delta)x(t) \\ &= [A + B(I - \Delta D)^{-1} \Delta C]x(t)\end{aligned}\quad (6.3.1)$$

其中： $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量， $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是系统的名义状态矩阵，即忽略了参数不确定性后的系统状态矩阵， Δ 是不确定矩阵，反映了系统模型中的参数摄动和不确定性。一般我们并不知道矩阵 Δ 的精确取值，但知道其在某个已知的范围中取值或变化。对所有在这个范围中的值，我们称其是不确定矩阵 Δ 的允许值。

考虑由特征函数

$$f_D(s) = L + sM + \bar{s}M^T \quad (6.3.2)$$

刻画的 LMI 区域 D ，其中 $L, M \in \mathbf{R}^{p \times p}$ ，且 L 是对称的。假定名义状态矩阵 A 是 D-稳定的，即 A 的所有特征值均在区域 D 中，则本节关心的是：对给定的不确定性允许变化范围，寻找一个检验条件来判别对所有允许的不确定矩阵 Δ ， $A(\Delta)$ 的所有特征值是否

仍然在区域 D 中。

定义 6.3.1 鲁棒 D-稳定性

设矩阵 A 是 D -稳定的, 如果对所有允许的参数不确定矩阵 Δ , $A(\Delta)$ 的所有特征值均在区域 D 中, 则不确定系统 (6.3.1) 称为是鲁棒 D -稳定的。

特别地, 当区域 D 是左半开复平面时, 鲁棒 D -稳定性就是通常意义下的鲁棒稳定性。对一般的区域 D , 要导出不确定系统 (6.3.1) 鲁棒 D -稳定的充分必要条件仍然是一个没有解决的问题。但由不确定系统的二次稳定性概念启发, 可以考虑以下的二次 D -稳定性概念。

定义 6.3.2 二次 D-稳定性

给定一个由特征函数 (6.3.2) 描述的 LMI 区域 D , 如果存在一个实对称正定矩阵 X , 使得对所有允许的参数不确定矩阵 Δ ,

$$M_D(A(\Delta), X) = L \otimes X + M \otimes XA(\Delta) + M^T \otimes (XA(\Delta))^T < 0$$

则不确定系统 (6.3.1) 称为是二次 D -稳定的。

定理 6.1.1 告诉我们: 矩阵 A 是 D -稳定的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 X , 使得 $M_D(A, X) < 0$ 。定义 6.3.2 给出的二次 D -稳定性概念要求存在一个单一的对称正定矩阵 X , 使得对所有允许的不确定矩阵 Δ , 系统状态矩阵 $A(\Delta)$ 都满足 $M_D(A(\Delta), X) < 0$, 即在用定理 6.1.1 来检验矩阵 $A(\Delta)$ 的 D -稳定性时, 矩阵 X 对所有允许的不确定参数矩阵 Δ 都是适用的。因此, 二次 D -稳定性可以推出鲁棒 D -稳定性, 但反之却未必成立。尽管二次 D -稳定性概念存在这样的保守性, 但这一概念在处理不确定系统的鲁棒 D -稳定性分析和综合问题时仍然是非常有效的。

系统模型 (6.3.1) 也可以写成:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t)$$

$$z(t) = Cx(t) + Dw(t)$$

$$w(t) = \Delta z(t)$$

定义 $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, 则矩阵 $A(\Delta)$ 就是图 6.7 所示反馈系统的闭环矩阵。事实上, 这样的不确定性就是线性分式参数不确定性。

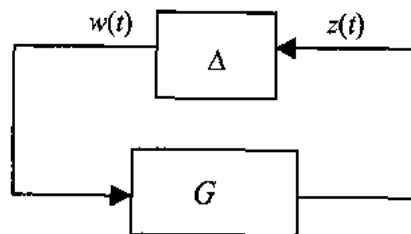


图 6.7 系统关联

因此, 系统 (6.3.1) 的鲁棒 D -稳定性问题等价于要求对所有允许的不确定性, 如图 6.7 所示的闭环系统的极点均在区域 D 中。

系统的鲁棒性分析依赖于系统不确定性的描述。这里将针对无结构不确定性和结构不

确定性两种情况, 分别研究系统 (6.3.1) 的鲁棒 D-稳定性分析问题。

6.3.1 无结构不确定性

这一小节考虑的不确定矩阵 $\Delta \in E^{m \times m}$ 只假定是范数有界的, 即

$$\sigma_{\max}(\Delta) \leq \gamma^{-1} \quad (6.3.3)$$

其中的参数 γ 反映了参数不确定性的程度, 即参数不确定性的允许变化范围。E 既可以是实数集 \mathbf{R} , 也可以是复数集 \mathbf{C} 。尽管在实际系统中, 只有实参数的不确定性才有物理意义, 但复参数不确定系统的相关结果可以用来处理具有动态参数不确定性系统的鲁棒 D-稳定性分析问题。

本小节的目的是对给定的参数 γ , 对具有不确定性 (6.3.3) 的系统 (6.3.1), 给出其鲁棒 D-稳定性检验方法。

假定区域 D 的特征函数 $f_D(s)$ 中的矩阵 M 可以分解成

$$M = M_1^T M_2 \quad (6.3.4)$$

其中: M_1 和 M_2 是满列秩的实数矩阵 (例如可以采用奇异值分解方法得到这样的分解)。如果 $\text{rank}(M) = k$, 那么 $M_1, M_2 \in \mathbf{R}^{k \times p}$ 。

以下就是这一节的主要结论, 它给出了不确定系统 (6.3.1) 二次 D-稳定的一个充分条件。

定理 6.3.1 考虑不确定系统 (6.3.1), 对给定的参数 $\gamma > 0$ 和区域 D , 如果存在对称矩阵 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $P \in \mathbf{R}^{k \times k}$, 使得

$$\begin{bmatrix} M_D(A, X) & M_1^T \otimes (XB) & (M_2^T P) \otimes C^T \\ M_1 \otimes (B^T X) & -\gamma P \otimes I & P \otimes D^T \\ PM_2 \otimes C & P \otimes D & -\gamma P \otimes I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.5)$$

$$X > 0, \quad P > 0 \quad (6.3.6)$$

则不确定系统 (6.3.1) 是二次 D-稳定的。

证明 不失一般性, 总可以假定 $\gamma = 1$ 。从不等式 (6.3.5) 可得:

$$\begin{bmatrix} -P \otimes I & P \otimes D^T \\ P \otimes D & -P \otimes I \end{bmatrix} < 0$$

对上式左端的矩阵分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P^{1/2} \otimes I & 0 \\ 0 & P^{-1/2} \otimes I \end{bmatrix}$$

并利用矩阵 Kronecker 乘积的性质, 可得:

$$\begin{bmatrix} -I & I \otimes D^T \\ I \otimes D & -I \end{bmatrix} < 0$$

由此及块对角矩阵负定性的性质, 可进一步得到

$$\begin{bmatrix} -I & D^T \\ D & -I \end{bmatrix} < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 上式等价于 $-I + D^T D < 0$, 即 $\sigma_{\max}(D) < 1$ 。对所有满足 $\sigma_{\max}(\Delta) \leq 1$ 的不确定矩阵 Δ , 由矩阵奇异值性质, 可得:

$$\sigma_{\max}(\Delta D) \leq \sigma_{\max}(\Delta) \sigma_{\max}(D) < 1$$

这就保证了在条件 (6.3.5) 下, 对所有允许的不确定矩阵 Δ , 矩阵 $I - \Delta D$ 总是可逆的。

根据定义, 系统 (6.3.1) 是二次 D-稳定的当且仅当存在对称正定矩阵 X , 使得对所有允许的不确定矩阵 Δ ,

$$\begin{aligned} 0 &> M_D(A(\Delta), X) \\ &= L \otimes X + M \otimes [X(A + B(I - \Delta D)^{-1} \Delta C)] + M^T \otimes [X(A + B(I - \Delta D)^{-1} \Delta C)]^H \\ &= M_D(A, X) + M_1^T M_2 \otimes [XB(I - \Delta D)^{-1} \Delta C] + M_2^T M_1 \otimes [XB(I - \Delta D)^{-1} \Delta C]^H \\ &= M_D(A, X) + (M_1^T \otimes XB)(M_2 \otimes (I - \Delta D)^{-1} \Delta C) \\ &\quad + [M_2^T \otimes ((I - \Delta D)^{-1} \Delta C)^H](M_1 \otimes B^T X) \end{aligned}$$

上式可以等价地表示成: 对任意非零向量 v 和任意允许的不确定矩阵 Δ ,

$$v^H M_D(A, X) v + 2v^H (M_1^T \otimes XB)(M_2 \otimes (I - \Delta D)^{-1} \Delta C) v < 0$$

对固定的 $v \neq 0$, 以上不等式成立的一个充分必要条件是对任意的 $p \in S_v = \{(M_2 \otimes (I - \Delta D)^{-1} \Delta C)v : \sigma_{\max}(\Delta) \leq 1\}$,

$$v^H M_D(A, X) v + 2v^H (M_1^T \otimes XB)p < 0 \quad (6.3.7)$$

注意到 $p = (M_2 \otimes (I - \Delta D)^{-1} \Delta C)v$ 是方程 $p = (I_k \otimes \Delta)q_{p,v}$ 的惟一解, 其中

$$q_{p,v} = (I_k \otimes D)p + (M_2 \otimes C)v, \quad k = \text{rank}(M) \quad (6.3.8)$$

因此, 可以用更简单的形式

$$S_v = \{p : p = (I_k \otimes \Delta)q_{p,v}, \sigma_{\max}(\Delta) \leq 1\}$$

来等价地描述 S_v 。

由 $p = (I_k \otimes \Delta)q$ 和 $\sigma_{\max}(\Delta) \leq 1$ 可得: 对任意 $k \times k$ 维的对称正定矩阵 P ,

$$q^H (P \otimes I) q - p^H (P \otimes I) p = q^H \{P \otimes (I - \Delta^H \Delta)\} q \geq 0$$

因此, 式 (6.3.7) 成立的一个充分条件是: 当

$$q_{p,v}^H (P \otimes I) q_{p,v} - p^H (P \otimes I) p \geq 0$$

时, 有

$$v^H M_D(A, X) v + 2v^H (M_1^T \otimes XB)p < 0 \quad (6.3.9)$$

或从表达式 (6.3.8), 得到一个等价的条件: 当

$$\begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}^H \left(\begin{bmatrix} M_2^T \otimes C^T \\ I \otimes D^T \end{bmatrix} (P \otimes I) \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I \otimes D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -P \otimes I \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} \geq 0$$

时, 有

$$\begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} M_D(A, X) & M_1^T \otimes (XB) \\ M_1 \otimes (B^T X) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix} < 0$$

使用标准的 S-procedure 方法, 以上条件等价于一个单一的线性矩阵不等式约束:

$$\begin{bmatrix} M_D(A, X) & M_1^T \otimes (XB) \\ M_1 \otimes (B^T X) & -P \otimes I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_2^T \otimes C^T \\ I \otimes D^T \end{bmatrix} (P \otimes I) \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I \otimes D \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.10)$$

进一步, 应用矩阵的 Schur 补性质, 可得矩阵不等式 (6.3.10) 等价于 (6.3.5)。定理得证。

注 6.3.1 当 $\text{rank}(M)=1$ 时, 定理 6.3.1 中的条件是充分必要的。事实上, 在这种情况下, 集合 S_v 可由关系式 $p = \Delta q_{p,v}$ 刻画, 因此和集合 $\{p: \text{存在对称正定矩阵 } P, \text{ 使得 } q^H P q - p^H P p \geq 0\}$ 相等。从定理的证明过程可以看出, 这两个集合之间的差异正好是定理条件保守性的根源。因此, 当 $\text{rank}(M)=1$ 时, 线性矩阵不等式系统 (6.3.5) ~ (6.3.6) 的可行性就成为不确定系统 (6.3.1) 二次 D-稳定的一个充分必要条件。另外, 在这种情况下, 矩阵 P 只是一个标量, 通过对矩阵不等式 (6.3.5) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{\frac{1}{\sqrt{P}}I, \frac{1}{\sqrt{P}}I, \frac{1}{\sqrt{P}}I\}$, 并记 $\hat{X} = P^{-1}X$, 可得不等式 (6.3.5) 等价于

$$\begin{bmatrix} M_D(A, \hat{X}) & M_1^T \otimes (\hat{X}B) & M_2^T \otimes C^T \\ M_1 \otimes (B^T \hat{X}) & -I & D^T \\ M_2 \otimes C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

因此, 当 $\text{rank}(M)=1$ 时, 线性矩阵不等式 (6.3.5) ~ (6.3.6) 中的矩阵 P 可以取成单位标量 1。

(6.3.5) ~ (6.3.6) 是矩阵变量 X 和 P 的一个线性矩阵不等式系统。因此, 定理 6.3.1 通过一个线性矩阵不等式系统的可行性给出了不确定系统 (6.3.1) 鲁棒 D-稳定的一个充分条件。而对线性矩阵不等式系统 (6.3.5) ~ (6.3.6), 则可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来求解其可行性问题。

以下针对左半平面和圆盘等特殊区域, 来看一下定理 6.3.1 的相应结果。

左半开复平面的特征函数是 $f_D(s) = s + \bar{s}$, 因此, 相应的 $L=0$, $M=1$ 。由于 $\text{rank}(M)=1$, 根据注 6.3.1, 变量 P 是一个标量, 且可以取成 $P=1$ 。取 $M_1=M_2=1$, 那么矩阵不等式 (6.3.5) 就变成

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

这就是线性时不变连续系统的有界实引理所刻画的不等式。这个结论建立了二次稳定性、 H_∞ 控制和小增益定理之间的等价关系，也正好是 Khargonekar 等 (1990) 揭示的结果。

对中心在 $(-q, 0)$ 、半径为 r 的圆盘 $D(q, r)$ ，其特征函数是

$$f_D(s) = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \bar{s} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此，

$$L = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = M_1^T M_2$$

由于 $\text{rank}(M) = 1$ ，故定理 6.3.1 中的变量 P 是一个标量，且可以取成 $P = 1$ ，相应的矩阵不等式 (6.3.5) 变成

$$\begin{bmatrix} -rX & qX + XA & XB & 0 \\ qX + A^T X & -rX & 0 & C^T \\ B^T X & 0 & -\gamma I & D^T \\ 0 & C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

应用矩阵的 Schur 补性质及 $-rX < 0$ ，上式等价于

$$\begin{bmatrix} -rX & 0 & C^T \\ 0 & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qX + A^T X \\ B^T X \\ 0 \end{bmatrix} (rX)^{-1} \begin{bmatrix} qX + XA & XB & 0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \hat{A}^T X \hat{A} - X & \hat{A}^T X \hat{B} & \hat{C}^T \\ \hat{B}^T X \hat{A} & -\gamma I + \hat{B}^T X \hat{B} & D^T \\ \hat{C} & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

其中：

$$\hat{A} = \frac{A + qI}{r}, \hat{B} = \frac{1}{\sqrt{r}} B, C = \frac{1}{\sqrt{r}} C$$

矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \hat{A}^T X \hat{A} - X & \hat{A}^T X \hat{B} & \hat{C}^T \\ \hat{B}^T X \hat{A} & -\gamma I + \hat{B}^T X \hat{B} & D^T \\ \hat{C} & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.11)$$

正好是线性时不变离散时间系统 $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$ 应用离散时间系统的有界实引理后得到的矩阵不等式。

如果不确定系统 (6.3.1) 的名义系统是 D-稳定的，则可以应用定理 6.3.1 来确定使得不确定系统 (6.3.1) 保持鲁棒 D-稳定的不确定矩阵 Δ 的最大允许变化范围。通过建立和求解以下的优化问题：

$$\min \gamma \quad (6.3.12)$$

$$\text{s.t.} \quad (6.3.5)$$

$$(6.3.6)$$

可以得到衡量不确定性允许变化范围的指标 γ 。问题 (6.3.12) 具有广义特征值问题的形式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `gevp` 来求解问题 (6.3.12)。

在实际应用中, 所关心的 LMI 区域 D 往往是一些基本 LMI 区域 D_1, \dots, D_N 的交, 利用定理 6.3.1 也可以得到关于这样的 LMI 区域的鲁棒 D-稳定性检验条件。

设 D_i 的特征函数是

$$f_{D_i}(s) = L_i + sM_i + \bar{s}M_i^T, \quad M_i = M_{1i}^T M_{2i}$$

则 $D = D_1 \cap \dots \cap D_N$ 的特征函数是

$$f_D(s) = \text{diag}\{f_{D_1}(s), \dots, f_{D_N}(s)\}$$

对这个 LMI 区域 D , 可以应用定理 6.3.1 来检验系统 (6.3.1) 的二次 D-稳定性。

对系统的鲁棒 D-稳定性, 更为有效和具有更小保守性的方法是对每一个区域 D_i 应用定理 6.3.1 来检验系统 (6.3.1) 的 D-稳定性, 通过保证对所有允许的不确定性, 系统的所有特征值均在每一个区域 D_i 中来保证系统 (6.3.1) 的鲁棒 D-稳定性。

事实上, 根据定理 6.3.1, 对所有允许的不确定性 Δ , 系统 (6.3.1) 的所有特征值均在区域 D_i 中的一个充分条件是存在对称矩阵 X_i 和 P_i , 使得

$$\begin{bmatrix} M_{D_i}(A, X_i) & M_{1i}^T \otimes (X_i B) & (M_{2i}^T P_i) \otimes C^T \\ M_{1i} \otimes (B^T X_i) & -\gamma P_i \otimes I & P_i \otimes D^T \\ (P_i M_{2i}) \otimes C & P_i \otimes D & -\gamma P_i \otimes I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.13)$$

$$P_i > 0, \quad X_i > 0$$

对 N 个区域得到的 N 个线性矩阵不等式系统 (6.3.13) 的可行性问题是相互独立的, 因此可以独立地求解。相反, 如果直接应用定理 6.3.1 到特征函数 $f_D(z)$, 则可以得到一组联立的线性矩阵不等式系统 (6.3.13), 其中的变量是 $X = X_1 = \dots = X_N$ 和 P_1, \dots, P_N 。由于这是一组联立的不等式, 维数增加了, 因此计算也变得更加复杂。另外, 由于要求有一个单一的变量 X 同时满足 N 个线性矩阵不等式系统 (6.3.13), 因此这种方法具有更大的保守性。注意, 和推论 6.1.1 不同, 定理 6.3.1 给出的条件仅仅是充分的。

这个事实也说明了二次 D-稳定性比鲁棒 D-稳定性具有更大的保守性。

在以上的讨论中, 式 (6.3.3) 描述的不确定性是时不变的, 因为系统极点的概念是对线性定常系统定义的。但是以上得到的关于不确定系统鲁棒 D-稳定性分析的结论对于研究具有时变不确定性系统的动态特性也是有帮助的。

当不确定系统 (6.3.1) 中的参数不确定矩阵 Δ 是时变时, 即

$$A(t) = A(\Delta(t)) = A - B(I - D\Delta(t))^{-1} \Delta(t)C$$

$$\sigma_{\max}(\Delta(t)) \leq 1$$

定理 6.3.1 仍然保证系统 (6.3.1) 具有以下性质:

- 对所有时间 t , 矩阵 $A(\Delta(t))$ 是 D-稳定的;
- 当区域 D 在某个稳定的半平面 $\{z: z + \bar{z} < -2\alpha\}$ 中时, 其中的 $\alpha > 0$, 则系统的状态具有指数衰减率 α 。

上面的第二个结论可以由以下的引理推出。

引理 6.3.1 考虑具有特征函数 $f_D(s) = L + sM + \bar{s}M^T$ 的 LMI 区域 D , 假定动态系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

是二次 D-稳定的, 即存在对称正定矩阵 X , 使得对所有的 t ,

$$L \otimes X + M \otimes XA(t) + M^T \otimes A^T(t)X < 0 \quad (6.3.14)$$

则对所有 $x(t) \neq 0$, 二次型函数 $V(x(t)) = x^T(t)Xx(t)$ 满足

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \in D \cap \mathbf{R}$$

证明 分别用矩阵 $I \otimes x^T$ 和它的转置矩阵 $I \otimes x$ 左乘和右乘不等式 (6.3.14), 可得对所有的 $x \neq 0$,

$$L \otimes x^T X x + M \otimes x^T X A(t) x + M^T \otimes x^T A^T(t) X x < 0 \quad (6.3.15)$$

由于 $\frac{1}{2} \dot{V}(x) = x^T X A(t) x = x^T A^T(t) X x$, 不等式 (6.3.15) 两端均除以正数 $V(x)$ 得到

$$L \otimes 1 + M \otimes \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right) + M^T \otimes \left(\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right) < 0$$

由区域 D 的定义, 上式保证了 $\frac{1}{2} \frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \in D$ 。引理得证。

6.3.2 结构不确定性

二次 D-稳定性概念要求对所有允许的不确定性, 存在一个单一的对称正定矩阵 X , 使得矩阵不等式 $M_D(A(\Delta), X) < 0$ 成立。由于要求矩阵 X 对所有允许的不确定性都适用, 因此二次 D-稳定性概念具有很大的保守性。前面对多个 LMI 区域的交的情况, 从一个方面说明了这个概念的保守性。在鲁棒稳定性分析的研究中, 如何降低结果的保守性一直是人们所关心的一个问题。

如果能够得到更多关于不确定性的信息, 自然希望能利用这些信息来降低鲁棒 D-稳定性分析条件的保守性。本小节所考虑的不确定性 Δ 假定是实的, 且具有一定结构特征, 即

$$\Delta = \Delta(\delta) = \text{diag}\{\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_q I_{q_q}\}, \delta_i \in \mathbf{R}, |\delta_i| \leq 1 \quad (6.3.16)$$

其中的 δ_i 表示已标准化的不确定参数。记

$$H = \{ \delta = [\delta_1, \dots, \delta_q]^T \in \mathbf{R}^q : |\delta_i| \leq 1 \}$$

V 是这个超正方体的顶点集, 即 $V = \{\delta = [\delta_1, \dots, \delta_q]^T \in \mathbf{R}^q : \delta_i = 1 \text{ 或 } -1\}$ 。

为了强调系统矩阵对不确定参数向量 δ 的依赖性, 将系统的状态矩阵写成

$$A(\delta) = A + B(I - \Delta(\delta)D)^{-1}\Delta(\delta)C \quad (6.3.17)$$

其中: $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是已知的矩阵。对由 (6.3.2) 式确定的 LMI 区域 D , 根据定理 6.1.1, 对任意确定的 δ , 矩阵 $A(\delta)$ 是 D-稳定的当且仅当存在对称正定矩阵 $X(\delta)$, 使得

$$L \otimes X(\delta) + M \otimes (X(\delta)A(\delta)) + M^T \otimes (A^T(\delta)X(\delta)) < 0 \quad (6.3.18)$$

二次 D-稳定性要求上式中的 $X(\delta)$ 不依赖于 δ 。我们已经知道这一要求导致了一定的保守性。现在假定 δ 是时不变的, 但是未知的, 希望寻求一个依赖 δ 的矩阵函数 $X(\delta)$, 使得对所有允许的 δ , 矩阵不等式 (6.3.18) 成立。显然, 这样通过利用不确定性的信息, 将降低由二次 D-稳定性概念引进的保守性。

在此, 为了处理上的方便, 考虑 $X(\delta)$ 是 δ 的仿射函数, 即

$$X(\delta) = X_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i X_i = X_0 + J^T \hat{\Delta}(\delta) \hat{X} J$$

其中: $X_0, X_1, \dots, X_q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是待确定的矩阵变量。

$$J = [I_n, \dots, I_n]^T$$

$$\hat{\Delta}(\delta) = \text{diag}\{\delta_1 I_n, \dots, \delta_q I_n\}$$

$$\hat{X} = \text{diag}\{X_1, \dots, X_q\}$$

以下分别对由 (6.3.17) 式给出的 δ 的线性分式函数 $A(\delta)$ 和 δ 的仿射函数 $A(\delta)$ (即在 (6.3.17) 式中, $D=0$) 这两类函数, 给出具有更小保守性的鲁棒 D-稳定性条件。

1. 线性分式依赖的 $A(\delta)$

首先考虑当 $A(\delta)$ 是不确定参数 δ 的线性分式函数时, 不确定系统的鲁棒 D-稳定性分析问题。

定理 6.3.2 对分别由 (6.3.16) 和 (6.3.17) 描述的不确定参数 δ 和不确定矩阵 $A(\delta)$, (6.3.2) 式给定的 LMI 区域 D , M 的一个满秩分解 (6.3.4), 如果存在对称矩阵 X_0 、 $\hat{X} = \text{diag}\{X_1, \dots, X_q\}$ ($X_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$)、 $\mathbf{R}^{s \times s}$ 中的尺度矩阵 $S = S^T$ 、 $R < 0$ 和 Q , 使得

$$\begin{bmatrix} L \otimes X_0 + M \otimes X_0 A + M^T \otimes A^T X_0 & M_1^T \otimes X_0 B & * \\ M_1 \otimes B^T X_0 & 0 & * \\ L \otimes \hat{X} J + M \otimes \hat{X} J A & M_1^T \otimes \hat{X} J B & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I_k \otimes D & 0 \\ I_p \otimes J & 0 & 0 \\ 0 & I_{kr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{qnp} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I_k \otimes D & 0 \\ I_p \otimes J & 0 & 0 \\ 0 & I_{kr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{qnp} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.19)$$

对所有的 $\bar{\delta} \in V$,

$$\begin{bmatrix} I_s & \text{diag}\{I_k \otimes \Delta(\bar{\delta}), I_p \otimes \hat{\Delta}(\bar{\delta})\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ \text{diag}\{I_k \otimes \Delta(\bar{\delta}), I_p \otimes \hat{\Delta}(\bar{\delta})\} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.3.20)$$

其中: $s = kr + qnp$, $r = \sum_{i=1}^q r_i$, 则由 (6.3.17) 式给出的不确定矩阵 $A(\delta)$ 是鲁棒 D-稳定的。

证明 对 $R < 0$, 矩阵函数

$$F(\delta) = S + QD(\delta) + D(\delta)Q^T + D(\delta)RD(\delta)$$

$$D(\delta) = \text{diag}\{I \otimes \Delta(\delta), I \otimes \hat{\Delta}(\delta)\}$$

关于 δ 是凹的, 即对满足 $0 \leq \alpha \leq 1$ 的任意 α 和任意的 $\delta_1, \delta_2 \in H$, $F(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2) \geq \alpha F(\delta_1) + (1-\alpha)F(\delta_2)$ 。因此, 如果矩阵不等式 (6.3.20) 在 H 的所有角点处成立, 则对所有的 $\delta \in H$, 不等式 (6.3.20) 也成立。

在定理条件下, 首先证明对所有的 $\delta \in H$, 矩阵 $I - D\Delta(\delta)$ 是可逆的。若该结论不成立, 则必存在某个 $\delta \in H$, 使得矩阵 $I - D\Delta(\delta)$ 是奇异的, 即存在向量 $y \neq 0$, 使得 $y = D\Delta(\delta)y$ 。

对矩阵不等式 (6.3.19) 分别左乘满秩矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & I \otimes (\Delta(\delta)y)^T & 0 \end{bmatrix}$ 和右乘该矩阵的转置, 可得

$$\begin{bmatrix} I \otimes y \\ 0 \\ I \otimes \Delta(\delta)y \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \otimes y \\ 0 \\ I \otimes \Delta(\delta)y \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.21)$$

另一方面, 由于 (6.3.20) 对所有的 $\delta \in H$ 也成立, 用满秩矩阵 $\begin{bmatrix} I \otimes y^T & 0 \end{bmatrix}$ 和它的转置矩阵分别左乘和右乘矩阵不等式 (6.3.20), 则可得到

$$\begin{bmatrix} I \otimes y \\ 0 \\ I \otimes \Delta(\delta)y \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \otimes y \\ 0 \\ I \otimes \Delta(\delta)y \\ 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (6.3.22)$$

显然, 不等式 (6.3.21) 和 (6.3.22) 是矛盾的。这一矛盾表明前面的假定是错误的, 故对所有的 $\delta \in H$, 矩阵 $I - D\Delta(\delta)$ 是可逆的。因此由 (6.3.17) 式确定的矩阵 $A(\delta)$ 是有定义的。

如果对所有的 $\eta \neq 0$ 和所有的 $\delta \in H$, 矩阵 $X(\delta) = X_0 + J^T \hat{\Delta}(\delta) \hat{X} J$ 满足

$$\eta^T [L \otimes X(\delta) + M \otimes (X(\delta)A(\delta)) + M^T \otimes (A^T(\delta)X(\delta))] \eta < 0 \quad (6.3.23)$$

$$X(\delta) > 0 \quad (6.3.24)$$

则根据定理 6.1.1, 不确定矩阵 $A(\delta)$ 是 D-稳定的。利用 $A(\delta)$ 、 $X(\delta)$ 的表示式和分解式 $M = M_1^T M_2$, 对于固定的 $\eta \neq 0$, 通过直接计算可得矩阵不等式 (6.3.23) 等价于: 当

$$\begin{bmatrix} \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} \in S_\eta = \left\{ \begin{bmatrix} M_2 \otimes \Delta(\delta)(I_r - D\Delta(\delta))^{-1}C \\ I_p \otimes \hat{\Delta}(\delta)J \end{bmatrix} \eta : \delta \in H \right\},$$

时, 有

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L \otimes X_0 + M \otimes X_0 A + M^T \otimes A^T X_0 & M_1^T \otimes X_0 B & * \\ M_1 \otimes B^T X_0 & 0 & * \\ L \otimes \hat{X}J + M \otimes \hat{X}JA & M_1^T \otimes \hat{X}JB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} < 0 \quad (6.3.25)$$

利用矩阵运算, 容易证明

$$S_\eta = \left\{ \begin{bmatrix} \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \otimes \Delta(\delta) & 0 \\ 0 & I \otimes \hat{\Delta}(\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \rho \end{bmatrix} : \delta \in H \right\} \quad (6.3.26)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I_k \otimes D & 0 \\ I_p \otimes J & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix}$$

利用 (6.3.26) 式给出的集合 S_η 中元的刻画, 通过用向量 $[\xi^T \ \rho^T]$ 和它的转置分别左乘和右乘矩阵不等式 (6.3.20), 可得:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \xi \\ \rho \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \rho \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I_k \otimes D & 0 \\ I_p \otimes J & 0 & 0 \\ 0 & I_{kr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{qnp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \otimes C & I_k \otimes D & 0 \\ I_p \otimes J & 0 & 0 \\ 0 & I_{kr} & 0 \\ 0 & 0 & I_{qnp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.3.27) \end{aligned}$$

因此,

$$S_\eta \subset \bar{S}_\eta = \left\{ \begin{bmatrix} \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} : \text{不等式(6.3.27)成立} \right\}$$

矩阵不等式 (6.3.23) 成立的一个充分条件是当 $\begin{bmatrix} \varsigma \\ \pi \end{bmatrix} \in \bar{S}_\eta$ 时, 不等式 (6.3.25) 成立。

应用标准的 S-procedure 处理进一步得到这一条件等价于矩阵不等式 (6.3.19)。

为了完成定理的证明, 我们还须证明对所有的 $\delta \in H$, 不等式 (6.3.24) 成立。反设此结论不成立, 即存在某个 $\delta \in H$ 和非零向量 w , 使得 $X(\delta)w = 0$, 取 $\eta = [1, \dots, 1]^T \otimes w$, 可得不等式 (6.3.23) 的左端等于零, 这就导致了一个矛盾。因此, $X(\delta)$ 在 H 上不可能是奇异的。由于 $X(0) = X_0 > 0$, 故 $X(\delta)$ 只能是正定的。这就证明了定理的结论。

2. 仿射依赖的 $A(\delta)$

在式 (4.2.17) 描述的矩阵 $A(\delta)$ 中, 当 $D=0$ 时, 不确定矩阵 $A(\delta)$ 就是 δ_i 的一个仿射函数:

$$A(\delta) = A_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i A_i \quad (6.3.28)$$

以下定理给出了对这样的一类结构参数不确定性, 不确定矩阵 $A(\delta)$ 是鲁棒 D-稳定的条件。

定理 6.3.3 假定不确定系统 (6.3.1) 中的参数不确定性具有形式 (6.3.16), 状态矩阵具有形式 (6.3.28)。若存在对称矩阵 X_0, X_1, \dots, X_q 和标量 $m_i, i=1, 2, \dots, q$, 使得对 H 中的所有顶点和 $i=1, 2, \dots, q$,

$$L \otimes X(\delta) + M \otimes X(\delta) A(\delta) + M^T \otimes A^T(\delta) X(\delta) + \sum_{i=1}^q \delta_i^2 m_i I < 0 \quad (6.3.29)$$

$$M \otimes (X_i A_i) + M^T \otimes (A_i^T X_i) + m_i I \geq 0 \quad (6.3.30)$$

$$X_0 > 0, \quad m_i \geq 0 \quad (6.3.31)$$

则不确定系统 (6.3.1) 是鲁棒 D-稳定的, 其中 $X = X_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i X_i$ 。

在给出这个定理的证明之前, 首先引进多凸函数的概念。在用参数 Lyapunov 函数处理系统的稳定性问题时, 多凸函数起了很重要的作用。

如果函数 $f(\delta_1, \dots, \delta_q)$ 关于每一个变量分别是凸的, 则该函数称为是一个多凸函数。特别地, 对一类二次型多凸函数, 有以下性质。

引理 6.3.2 考虑一个标量二次型函数

$$f(\delta_1, \dots, \delta_q) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \delta_i + \sum_{i < j} \beta_{ij} \delta_i \delta_j + \sum_{i=1}^q \gamma_i \delta_i^2$$

假定 $f(\cdot)$ 是一个多凸函数, 即对 $i=1, 2, \dots, q$,

$$2\gamma_i = \frac{\partial^2 f}{\partial \delta_i^2}(\delta) \geq 0$$

则 $f(\cdot) < 0$ 在超正方体 H 中成立, 当且仅当 $f(\cdot) < 0$ 在 H 的顶点集 V 上成立。

引理说明了对一个标量二次型多凸函数, 在 H 的有限个顶点上, 不等式 $f(\cdot) < 0$ 的成立就可以保证不等式 $f(\cdot) < 0$ 对超正方体 H 中的所有点都成立。这使得不等式 $f(\cdot) < 0$ 的检验变得更为容易和可行。

证明 由于 $V \subset H$, 因此本引理条件的必要性部分是显然的。以下证明条件的充分性。

设 $\delta^* = [\delta_1^*, \dots, \delta_q^*]^T$ 是 $f(\cdot)$ 在 H 上的一个全局最大值点, 若 δ^* 不是超正方体 H 的顶点, 则存在 i , 使得 $-1 < \delta_i^* < 1$ 。考虑函数

$$g(\delta_i) = f(\delta_1^*, \dots, \delta_{i-1}^*, \delta_i, \delta_{i+1}^*, \dots, \delta_q^*) = a + b\delta_i + \gamma_i \delta_i^2$$

$f(\cdot)$ 的多凸性推出 $g(\delta_i)$ 是一个凸函数。根据凸函数的特点, $g(\delta_i)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值必定可以在 -1 和 1 这两个区间端点中的一个上达到, 从而可得

$$g(\delta_i^*) \leq \max\{g(-1), g(1)\}$$

另一方面, 由于 δ^* 是 $f(\cdot)$ 的一个全局最大值点, 故

$$\max\{g(-1), g(1)\} \leq g(\delta_i^*) = f(\delta^*)$$

结合这两个不等式, 可得

$$g(\delta_i^*) = \max\{g(-1), g(1)\}$$

重复这样的讨论, 可得 $f(\cdot)$ 可以在 H 的顶点上达到其最大值。因此, 对所有的 $\delta \in V$, $f(\delta) < 0$ 可以保证在整个超正方体 H 上, $f(\delta) < 0$ 也成立。引理得证。

定理 6.3.3 的证明:

定义

$$f(\delta) = \eta^T \left(L \otimes X(\delta) + M \otimes X(\delta) A(\delta) + M^T \otimes A^T(\delta) X(\delta) + \sum_{i=1}^q \delta_i^2 m_i I \right) \eta$$

其中: η 是任意给定的适当维数向量。利用矩阵 Kronecker 乘积的性质, 由不等式 (6.3.30) 可得 $f(\delta)$ 是一个多凸函数。

条件 (6.3.29) 保证了对 H 的所有顶点, $f(\delta) < 0$ 。根据引理 6.3.2, 可得对所有的 $\delta \in H$, $f(\delta) < 0$ 成立。进一步由 η 的任意性, 得到不等式 (6.3.29) 对所有的 $\delta \in H$ 成立。

为了要证明 $A(\delta)$ 是鲁棒 D-稳定的, 根据定理 6.1.1, 还必须证明对所有的 $\delta \in H$, $X(\delta) > 0$ 。

从定理条件可以证明: 对所有的 $\delta \in H$, $X(\delta)$ 均是非奇异的。事实上, 若存在 $\bar{\delta} \in H$, 使得 $X(\bar{\delta})$ 是奇异的, 则存在适当维数的非零向量 $\eta(\bar{\delta})$, 使得 $X(\bar{\delta})\eta(\bar{\delta}) = 0$ 。由不等式 (6.3.29) 和 $m_i \geq 0$ 可得:

$$L \otimes X(\bar{\delta}) + M \otimes X(\bar{\delta}) A(\bar{\delta}) + M^T \otimes A^T(\bar{\delta}) X(\bar{\delta}) < 0$$

在上式两边分别左乘矩阵 $I \otimes \eta^T(\bar{\delta})$ 和右乘矩阵 $I \otimes \eta(\bar{\delta})$, 通过利用矩阵 Kronecker 乘积的性质, $X(\bar{\delta})$ 的对称性和 $X(\bar{\delta})\eta(\bar{\delta}) = 0$, 可得:

$$0 = [I \otimes \eta^T(\bar{\delta})] [L \otimes X(\bar{\delta}) + M \otimes X(\bar{\delta}) A(\bar{\delta}) + M^T \otimes A^T(\bar{\delta}) X(\bar{\delta})] [I \otimes \eta(\bar{\delta})] < 0$$

这就导致了矛盾。因此, $X(\delta)$ 在 H 上是非奇异的。由于 $X(0) = X_0 > 0$, 故对所有的 $\delta \in H$, $X(\delta) > 0$ 。定理得证。

6.4 输出反馈控制器设计

基于 6.3 节得到的鲁棒 D-稳定性分析结果, 本节将给出使得闭环不确定系统的所有极

点均在一个给定 LMI 区域中的输出反馈控制器设计方法。

考虑不确定系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \\ w &= \Delta z\end{aligned}\quad (6.4.1)$$

其中的时不变不确定矩阵 Δ 满足 $\sigma_{\max}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$, γ 是一个已知常数。

给定一个 LMI 区域

$$D = \{z \in \mathbb{C}: L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

则关心的问题是: 设计一个满阶的动态输出反馈控制器 $K(s)$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y \\ u &= C_K x_K + D_K y\end{aligned}\quad (6.4.2)$$

使得对满足 $\sigma_{\max}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$ 的所有不确定矩阵 Δ , 闭环不确定系统矩阵

$$A_{cl}(\Delta) = A_{cl} + B_{cl}(\mathbf{I} - \Delta D_{cl})^{-1} \Delta C_{cl}$$

是鲁棒 D-稳定的。其中,

$$\begin{aligned}A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ B_K D_{21} \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= [C_1 + D_{12} D_K C_2 \quad D_{12} C_K], \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_K D_{21}\end{aligned}$$

满足这样要求的控制器 (6.4.2) 称为是系统 (6.4.1) 的一个鲁棒 D-稳定化控制器。

应用定理 6.3.1, 并取其中的 $P = \mathbf{I}$, 得到矩阵 $A_{cl}(\Delta)$ 二次 D-稳定 (因此也是鲁棒 D-稳定) 的一个充分条件: 存在一个对称正定矩阵 X , 使得

$$\begin{bmatrix} M_D(A_{cl}, X) & M_1^T \otimes (XB_{cl}) & M_2^T \otimes C_{cl}^T \\ M_1 \otimes (B_{cl}^T X) & -\mathcal{H} & \mathbf{I} \otimes D_{cl}^T \\ M_2 \otimes C_{cl} & \mathbf{I} \otimes D_{cl} & -\mathcal{H} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.4.3)$$

其中: $M_1^T M_2 = M$ 是矩阵 M 的一个满秩分解。可以基于矩阵不等式 (6.4.3) 来设计所要的鲁棒 D-稳定化输出反馈控制器。由于矩阵不等式 (6.4.3) 并不是变量 X 和控制器参数矩阵的一个线性矩阵不等式, 因此难以直接从矩阵不等式 (6.4.3) 求得所要的控制器参数矩阵。以下, 应用第 5 章提出的变量替换方法, 通过将矩阵不等式 (6.4.3) 转换成一个适当的线性矩阵不等式来确定鲁棒 D-稳定化输出反馈控制器 (6.4.2)。我们将这样一个结果总结在以下的定理中。

定理 6.4.1 存在一个满阶的控制器 (6.4.2), 使得矩阵不等式 (6.4.3) 成立, 当且仅当存在对称矩阵 R 、 S 、适当维数的矩阵 \bar{A}_K 、 \bar{B}_K 、 \bar{C}_K 和 D_K , 使得矩阵不等式

$$\Lambda(R, S) = \begin{bmatrix} R & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & S \end{bmatrix} > 0 \quad (6.4.4)$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes \Lambda(R, S) + M \otimes \Phi_A + M^T \otimes \Phi_A^T & M_1^T \otimes \Phi_B & M_2^T \otimes \Phi_C^T \\ M_1 \otimes \Phi_B^T & -\gamma I & I \otimes \Phi_D^T \\ M_2 \otimes \Phi_C & I \otimes \Phi_D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.4.5)$$

成立, 其中:

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} AR + B_2 \bar{C}_K & A + B_2 D_K C_2 \\ \bar{A}_K & SA + \bar{B}_K C_2 \end{bmatrix}, \Phi_B = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ SB_1 + \bar{B}_K D_{21} \end{bmatrix}$$

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} C_1 R + D_{12} \bar{C}_K & C_1 + D_{12} D_K C_2 \end{bmatrix}, \Phi_D = D_{11} + D_{12} D_K D_{21}$$

进而, 如果矩阵不等式系统 (6.4.4) ~ (6.4.5) 是可行的, 则一个 n 阶的鲁棒 D-稳定化输出反馈控制器是

$$K(s) = D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K$$

其中的 A_K 、 B_K 、 C_K 可按以下步骤计算得到:

- 计算满足 $\hat{M}\hat{N}^T = I - RS$ 的任意正方矩阵 \hat{M} 和 \hat{N} ;
- 求解以下的方程:

$$\begin{aligned} \bar{B}_K &= \hat{N}B_K + SB_2 D_K \\ \bar{C}_K &= C_K \hat{M}^T + D_K C_2 R \\ \bar{A}_K &= \hat{N}A_K \hat{M}^T + \hat{N}B_K C_2 R + SB_2 C_K \hat{M}^T + S(A + B_2 D_K C_2)R \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

得到 B_K 、 C_K 和 A_K 。

矩阵不等式 (6.4.4) 和 (6.4.5) 是矩阵变量 R 、 S 、 \bar{A}_K 、 \bar{B}_K 、 \bar{C}_K 和 D_K 的线性矩阵不等式。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来求解线性矩阵不等式系统 (6.4.4) ~ (6.4.5)。

定理 6.4.1 提出的线性矩阵不等式处理方法是基于定理 6.3.1, 由于定理 6.3.1 提供的鲁棒 D-稳定性条件仅仅是充分的, 另外在定理 6.4.1 的导出过程中还限定了 $P = I$ 。因此, 定理 6.4.1 的结论是比较保守的。这里是以结论的保守性来换取求解的方便和有效性。

如果所考虑的 LMI 区域 D 是若干个基本 LMI 区域 D_i 的交, 则对每一个 LMI 区域 D_i , 根据定理 6.3.1, 可以得到闭环矩阵必须满足的关于 X_i 的线性矩阵不等式 (6.4.3)。为了求解这样一组矩阵不等式, 还是将所有的 X_i 取成相同的对称矩阵 X , 由此可以得到一组关于 R 、 S 、 \bar{A}_K 、 \bar{B}_K 、 \bar{C}_K 和 D_K 的线性矩阵不等式。

鲁棒 D-稳定化输出反馈控制器设计问题的线性矩阵不等式处理方法不仅可以有效地解决鲁棒极点配置问题, 而且还可以类似 6.2 节中的讨论, 结合其他的性能要求来解决多目标鲁棒输出反馈控制器设计问题。

第 7 章 保性能控制

7.1 连续系统的保性能控制

考虑由以下状态方程描述的一类线性不确定系统：

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.1.1)$$

其中： $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量， $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入， A 和 B 是具有适当维数的已知常数矩阵， ΔA 和 ΔB 是适当维数的不确定矩阵函数，表示了系统模型中的参数不确定性。假定所考虑的参数不确定性是范数有界的，且具有以下形式：

$$[\Delta A \quad \Delta B] = DF(t)[E_1 \quad E_2] \quad (7.1.2)$$

其中： D 、 E_1 和 E_2 是适当维数的已知常数矩阵，它们反映了不确定性的结构信息， $F \in \mathbf{R}^{i \times j}$ 是一个未知矩阵，它可以是时变的，且满足

$$F^T(t)F(t) \leq I \quad (7.1.3)$$

对系统 (7.1.1)，定义二次型性能指标：

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (7.1.4)$$

其中： Q 和 R 是给定的对称正定加权矩阵。

关于系统的保性能控制，引进以下的定义：

定义 7.1.1 对系统 (7.1.1) 和性能指标 (7.1.4)，如果存在一个控制律 $u^*(t)$ 和一个正数 J^* ，使得对所有允许的不确定性，闭环系统是渐近稳定的，且闭环性能指标值满足 $J \leq J^*$ ，则 J^* 称为不确定系统 (7.1.1) 的一个性能上界， $u^*(t)$ 称为不确定系统 (7.1.1) 的一个保性能控制律 (guaranteed cost control law)。

保性能控制律不仅使得不确定闭环系统是鲁棒渐近稳定的，而且还使得不确定闭环系统具有一定的鲁棒性能。

本节针对给定的不确定系统 (7.1.1) 和性能指标 (7.1.4)，考虑状态反馈保性能控制律设计问题，基于线性矩阵不等式处理方法，给出保性能控制律的存在条件和设计方法。

以下定理给出了保性能状态反馈控制律的存在条件。

定理 7.1.1 对不确定系统 (7.1.1) 和性能指标 (7.1.4)，如果存在对称正定矩阵 P 和矩阵 K ，使得对所有允许的不确定性，

$$Q + K^T R K + P[A + BK + DF(E_1 + E_2 K)] + [A + BK + DF(E_1 + E_2 K)]^T P < 0 \quad (7.1.5)$$

则 $u(t) = Kx(t)$ 是系统 (7.1.1) 的一个保性能控制律，相应的一个系统性能上界是

$$J^* = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0.$$

证明 如果存在正定矩阵 \mathbf{P} 和矩阵 \mathbf{K} , 使得对所有允许的不确定性, 矩阵不等式 (7.1.5) 成立, 取控制律 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 则相应的闭环系统是

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{DF}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{K})]\mathbf{x}(t) \quad (7.1.6)$$

选取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, 由矩阵 \mathbf{P} 的正定性可推出 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x})$ 是正定的。沿闭环系统 (7.1.6) 的任意轨线, $V(\mathbf{x})$ 关于时间的导数是

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \{ \mathbf{P}[\mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{DF}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{K})] + [[\mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{DF}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{K})]^T \mathbf{P}] \mathbf{x}$$

根据条件 (7.1.5), 对所有允许的不确定性,

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < -\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} < 0 \quad (7.1.7)$$

由 Lyapunov 稳定性理论, 闭环系统 (7.1.6) 是鲁棒渐近稳定的。

进一步, 对 (7.1.7) 式两边对时间 t 从零到 ∞ 积分, 并利用系统的渐近稳定性, 可得

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \leq V(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0$$

根据定义 7.1.1, $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 是系统 (7.1.1) 的一个保性能控制律, 且 $J^* = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0$ 是相应闭环性能指标的一个上界。定理得证。

注意到由定理 7.1.1 得到的性能上界依赖系统的初始状态 \mathbf{x}_0 。而在实际应用中, 我们很难精确确定系统的初始状态。为了克服这一困难, 可以假定初始状态 \mathbf{x}_0 是一个满足 $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T\} = \mathbf{I}$ 的零均值随机变量。通过考虑性能指标的期望值, 得到

$$\bar{J} = \mathbf{E}\{J\} \leq \mathbf{E}\{\mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0\} = \text{Trace}(\mathbf{P}) \quad (7.1.8)$$

定理 7.1.1 的条件 (7.1.5) 中包含了不确定矩阵 \mathbf{F} , 因此要检验对所有允许的不确定矩阵 \mathbf{F} , 矩阵不等式 (7.1.5) 都成立仍然是一件困难的工作。以下将给出这一条件的一个等价刻画。

定理 7.1.2 存在对称正定矩阵 \mathbf{P} 和矩阵 \mathbf{K} , 使得对所有允许的不确定性, 矩阵不等式 (7.1.5) 成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$ 、矩阵 \mathbf{W} 和对称正定矩阵 \mathbf{X} , 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{W} + (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{W})^T + \varepsilon \mathbf{D}\mathbf{D}^T & (\mathbf{E}_1\mathbf{X} + \mathbf{E}_2\mathbf{W})^T & \mathbf{X} & \mathbf{W}^T \\ \mathbf{E}_1\mathbf{X} + \mathbf{E}_2\mathbf{W} & -\varepsilon \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{W} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (7.1.9)$$

进而, 如果矩阵不等式 (7.1.9) 有一个可行解 $(\varepsilon, \mathbf{W}, \mathbf{X})$, 则

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{W}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (7.1.10)$$

是系统 (7.1.1) 的一个状态反馈保性能控制律, 相应的系统性能上界是

$$\bar{J} \leq \text{Trace}(\mathbf{X}^{-1}) = \bar{J}^* \quad (7.1.11)$$

证明 定义

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{P}$$

则矩阵不等式 (7.1.5) 可以写成

$$Y + PDF(E_1 + E_2K) + (E_1 + E_2K)^T F^T (PD)^T < 0$$

根据引理, 以上的矩阵不等式对所有满足 $F^T F \leq I$ 的不确定矩阵 F 成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon PDD^T P + \varepsilon^{-1}(E_1 + E_2K)^T (E_1 + E_2K) < 0$$

应用矩阵的 Schur 补性质, 上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} P(A+BK) + (A+BK)^T P + \varepsilon PDD^T P & (E_1 + E_2K)^T & I & K^T \\ E_1 + E_2K & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ I & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ K & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (7.1.12)$$

对矩阵不等式 (7.1.12) 分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, I, I, I\}$, 并记 $X = P^{-1}$, $W = KP^{-1}$, 即可得到 (7.1.9)。定理的其余部分很容易从前面的分析得到。定理得证。

不等式 (7.1.9) 是关于变量 ε , W 和 X 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来判断该线性矩阵不等式的可行性问题, 进而得到该线性矩阵不等式的可行解。式 (7.1.10) 用线性矩阵不等式 (7.1.9) 的可行解给出了保性能控制律的一个参数化表示。

定理 7.1.2 说明了: 若定理条件满足, 则系统 (7.1.1) 存在状态反馈保性能控制律, 同时它给出了一组保性能控制律的参数化表示。从 (7.1.11) 可以看出, 系统的性能上界依赖于保性能控制律的选取。因此, 一个自然的问题是: 如何选取一个适当的保性能控制律, 使得系统的性能上界最小。我们称这样一个问题是系统 (7.1.1) 的最优保性能控制问题, 使得系统性能上界最小的保性能控制律称为是最优保性能控制律。

以下的定理 7.1.3 给出了最优保性能控制问题的解。

定理 7.1.3 对给定的系统 (7.1.1) 和性能指标 (7.1.4), 如果以下的优化问题

$$\begin{aligned} & \min_{\varepsilon, W, X, M} \text{Trace}(M) \quad (7.1.13) \\ \text{s.t. (i)} & \begin{bmatrix} AX + BW + (AX + BW)^T + \varepsilon DD^T & (E_1X + E_2W)^T & X & W^T \\ E_1X + E_2W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{(ii)} & \begin{bmatrix} M & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

有解 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{M})$, 则 $u^*(t) = \tilde{W}\tilde{X}^{-1}x(t)$ 是系统的最优状态反馈保性能控制律。

证明 如果 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{M})$ 是优化问题 (7.1.13) 的一个解, 则 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{M})$ 也是问题 (7.1.13) 中约束条件 (i) 的一个可行解。根据定理 7.1.2, 控制律 $u^*(t) = \tilde{W}\tilde{X}^{-1}x(t)$ 是系统 (7.1.1) 的一个保性能控制律。

根据矩阵的 Schur 补性质, 问题 (7.1.13) 中的约束条件 (ii) 等价于 $M > X^{-1} > 0$ 。因此, $\text{Trace}(M)$ 的最小化将保证 $\text{Trace}(X^{-1})$ 的最小化, 即系统性能上界的最小化。由于问题 (7.1.13) 中的目标函数和约束条件都是变量的凸函数, 因此, 问题 (7.1.13) 是一个凸优化问题, 从而可以达到全局的最小值。定理得证。

问题 (7.1.13) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解。

如果可进一步得到不确定矩阵 F 的结构信息, 则可以降低以上保性能控制问题解的保守性。以下针对不确定矩阵 F 具有块对角形式, 给出相应的保性能控制结果。

考虑不确定系统 (7.1.1), 假定其中的不确定矩阵 F 具有以下的块对角形式:

$$F(t) = \text{diag}\{F_1(t), F_2(t), \dots, F_l(t)\} \quad (7.1.14)$$

其中 $F_k(t) \in \mathbf{R}^{n_k \times j_k}$, 且满足

$$F_k^T(t)F_k(t) \leq I_{j_k \times j_k}, \quad k=1, 2, \dots, l$$

式中的 $I_{j_k \times j_k}$ 表示 j_k 阶的单位矩阵。对

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l], \quad \varepsilon_k > 0, \quad k=1, 2, \dots, l$$

定义

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \text{diag}\{\varepsilon_1 I_{i_1 \times i_1}, \varepsilon_2 I_{i_2 \times i_2}, \dots, \varepsilon_l I_{i_l \times i_l}\} \\ \tilde{N} &= \text{diag}\{\varepsilon_1^{-1} I_{j_1 \times j_1}, \varepsilon_2^{-1} I_{j_2 \times j_2}, \dots, \varepsilon_l^{-1} I_{j_l \times j_l}\} \end{aligned}$$

则

$$DF(t)[E_1 \quad E_2] = D\tilde{M}F(t)[\tilde{N}E_1 \quad \tilde{N}E_2]$$

以下定理给出了具有块对角参数不确定性系统的最优保性能控制问题的解。

定理 7.1.4 对具有不确定矩阵 (7.1.14) 的系统 (7.1.1) 和性能指标 (7.1.4), 如果优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon, W, X, M} \quad & \text{Trace}(M) \\ \text{s.t. (i)} \quad & \begin{bmatrix} AX + BW + (AX + BW)^T & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T & D\tilde{M} \\ E_1 X - E_2 W & -\tilde{N}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ \tilde{M}D^T & 0 & 0 & 0 & -\tilde{M} \end{bmatrix} < 0 \\ \text{(ii)} \quad & \begin{bmatrix} M & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

有解 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{W}, \tilde{X}, \tilde{M})$, 则 $u^*(t) = \tilde{W}\tilde{X}^{-1}x(t)$ 是系统的最优状态反馈保性能控制律。

在问题 (7.1.15) 中, 由于引进了更多的自由变量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l$, 因此和定理 7.1.3 相比, 该问题的解可望具有更小的保守性。

例 7.1.1 考虑由 Kosmidou 等 (1991) 研究的直升机飞行的控制问题, 其动态模型是

$$\dot{x} = (A + r_1 A_1 + r_2 A_2)x + (B + s_1 B_1)u, \quad x(0) = x_0 \quad (7.1.16)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.7070 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1711 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.5200 & 4.9900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0673 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

r_1 、 r_2 和 s_1 是出现在系统模型中的不确定参数, 且满足

$$-1 \leq r_1 \leq 1, \quad -1 \leq r_2 \leq 1, \quad -1 \leq s_1 \leq 1$$

系统的性能指标是

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

其中的加权矩阵如下:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.0673 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

则 (7.1.16) 可以写成

$$\dot{x}(t) = (A + DFE_1)x(t) + (B + DFE_2)u(t)$$

这是一个具有块对角参数不确定性的系统。通过应用定理 7.1.4, 并求解相应的凸优化问题 (7.1.15), 得到最优状态反馈保性能控制律:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -0.6721 & 0.1921 & 0.8604 & 1.1844 \\ 0.3406 & 1.0065 & -0.2986 & -1.2138 \end{bmatrix} x(t)$$

相应的系统性能上界是 $\bar{J}^* = \text{Trace}(P) = 6.2954$ 。

如果进一步要求 $\mathbf{x}_0^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}_0 < 5.2$ ，则可以在问题 (7.1.15) 中增加一个约束

$$\begin{bmatrix} -5.2 & \mathbf{x}_0^T \\ \mathbf{x}_0 & -\mathbf{X} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

通过求解新的问题，可以得到最优保性能控制律

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} -0.7091 & 0.1883 & 0.9056 & 1.2448 \\ 0.3871 & 1.0300 & -0.2923 & -1.2461 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

此时， $J^* = \mathbf{x}_0^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}_0 = 5.1945$ ， $\bar{J}^* = 6.3235$ 。

这个例子也说明了保性能控制问题的 LMI 处理方法更容易处理一些附加的约束。

7.2 离散系统的保性能控制

本节研究一类不确定离散时间系统的保性能控制问题，提出基于线性矩阵不等式处理方法的反馈保性能控制律设计方法。

考虑由以下状态方程描述的不确定离散系统

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}(k) \quad (7.2.1)$$

其中： $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ 分别是系统 (7.2.1) 的状态和控制向量， \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是适当维数的常数矩阵， $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$ 是初始状态向量， $\Delta\mathbf{A}$ 和 $\Delta\mathbf{B}$ 是适当维数的不确定矩阵，并假定具有以下的形式：

$$[\Delta\mathbf{A} \quad \Delta\mathbf{B}] = \mathbf{D}\mathbf{F}[\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2] \quad (7.2.2)$$

其中： \mathbf{D} 、 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 是适当维数的常数矩阵，它们反映了不确定性的结构， $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{r \times j}$ 是满足

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I} \quad (7.2.3)$$

的未知矩阵，且可以是时变的。

对系统 (7.2.1)，定义一个性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] \quad (7.2.4)$$

其中： \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是给定的对称正定加权矩阵。

分析上一节提出的保性能控制律，不难发现保性能控制律的存在条件和设计方法都是依据矩阵不等式 (7.1.5) 导出的。这一不等式是不确定系统二次稳定性概念中 Lyapunov 矩阵不等式的推广，它进一步包含了性能指标中的加权矩阵项。我们将这样的一类特殊保性能控制律称为不确定系统的二次保性能控制律，它不仅保证了闭环不确定系统是二次稳定的，而且还保证了闭环的二次型性能指标值不超过某个确定的上界。关于不确定离散系

统, 我们给出以下的定义:

定义 7.2.1 对系统 (7.2.1) 和性能指标 (7.2.4), 若存在一个矩阵 K 和一个正定对称矩阵 P , 使得对所有非零的 $x(k)$ 和所有满足 (7.2.3) 式的不确定矩阵 F ,

$$\begin{aligned} & x^T(k)[A+BK+DF(E_1+E_2K)]^T P[A+BK+DF(E_1+E_2K)]x(k) \\ & - x^T(k)Px(k) + x^T(k)(Q+K^T RK)x(k) < 0 \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

则控制律 $u(k) = Kx(k)$ 称为系统 (7.2.1) 的一个具有性能矩阵 P 的二次保性能控制律。

以下定理给出了二次保性能控制和二次镇定以及和闭环性能指标值之间的关系。

定理 7.2.1 若 $u(k) = Kx(k)$ 是系统 (7.2.1) 和性能指标 (7.2.4) 的一个具有性能矩阵 P 的保性能控制律, 则对所有允许的不确定性, 闭环系统

$$x(k+1) = [A+BK+DF(E_1+E_2K)]x(k) \quad (7.2.6)$$

是二次稳定的, 且相应的闭环性能指标值满足

$$J \leq x_0^T Px_0 \quad (7.2.7)$$

证明 如果 $u(k) = Kx(k)$ 是系统 (7.2.1) 的一个具有性能矩阵 P 的保性能控制律, 定义 $V(x) = x^T Px$, 则根据定义 7.2.1, 沿闭环系统 (7.2.6) 的任意轨线, 对任意非零的 $x(k)$ 和所有满足 (7.2.3) 式的 F ,

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) < -x^T(k)(Q+K^T RK)x(k) < 0 \quad (7.2.8)$$

故闭环系统 (7.2.6) 是二次稳定的。

另一方面, 从 (7.2.8) 式得到

$$x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) < -\Delta V(x(k)) \quad (7.2.9)$$

在 (7.2.9) 式两边从 $k=0$ 到 $k=\infty$ 求和, 利用闭环系统 (7.2.6) 的渐近稳定性, 可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \leq x_0^T Px_0$$

由此得证 (7.2.7) 式成立。

定理 7.2.1 所得到的系统性能指标上界依赖于初始状态 x_0 , 若 x_0 是一个满足 $E\{x_0 x_0^T\} = I$ 的零均值随机变量, 则系统性能指标的期望值满足

$$\bar{J} = E\{J\} \leq E\{x_0^T Px_0\} = \text{Trace}(P) \quad (7.2.10)$$

以下将对给定的不确定离散系统 (7.2.1) 和性能指标 (7.2.4), 给出二次保性能控制律的存在条件和设计方法。

引理 7.2.1 设 A 是任一方阵, 则存在矩阵 $P > 0$, 使得 $A^T PA - P + T < 0$ 当且仅当存在矩阵 $X > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -X & AX \\ XA^T & -X + XTX \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.11)$$

证明 由矩阵的 Schur 补性质, 存在矩阵 $P > 0$, 使得 $A^T PA - P + T < 0$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A \\ A^T & -P+T \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.12)$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$$

可得 (7.2.12) 式等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & AP^{-1} \\ P^{-1}A^T & -P^{-1}+P^{-1}TP^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

记 $X = P^{-1}$, 即得引理之结论。引理得证。

以下的定理给出了系统 (7.2.1) 存在二次保性能控制律的一个充分必要条件。

定理 7.2.2 不确定离散系统 (7.2.1) 存在一个二次保性能控制律 $u(k)=Kx(k)$ 当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$ 、矩阵 K 和对称矩阵 $X > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon DD^T - X & (A+BK)X & 0 \\ X(A+BK)^T & -X+X(Q+K^TRK)X & X(E_1+E_2K)^T \\ 0 & (E_1+E_2K)X & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.13)$$

当矩阵不等式 (7.2.13) 有可行解 K 和 $X > 0$ 时, $u(k)=Kx(k)$ 是系统 (7.2.1) 的具有性能矩阵 X^{-1} 的一个二次保性能控制律。

证明 根据定义 7.2.1, 系统 (7.2.1) 存在一个二次保性能控制律 $u(k)=Kx(k)$ 当且仅当存在矩阵 K 和一个对称矩阵 $P > 0$, 使得对所有允许的不确定矩阵 F , 矩阵不等式

$$[A+BK+DF(E_1+E_2K)]^T P [A+BK+DF(E_1+E_2K)] - P + Q + K^TRK < 0$$

成立。由引理 7.2.1, 上式等价于存在对称矩阵 $X > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -X & [A+BK+DF(E_1+E_2K)]X \\ X[A+BK+DF(E_1+E_2K)]^T & -X+X(Q+K^TRK)X \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.14)$$

定义矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} -X & (A+BK)X \\ X(A+BK)^T & -X+X(Q+K^TRK)X \end{bmatrix}$$

则 (7.2.14) 式可以重新写成

$$Y + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 & (E_1+E_2K)X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (E_1+E_2K)X \end{bmatrix}^T F^T \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (7.2.15)$$

定义

$$H = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & (E_1+E_2K)X \end{bmatrix}$$

根据引理 5.4.1, 对所有满足 $F^TF \leq I$ 的矩阵 F , 矩阵不等式 (7.2.15) 成立当且仅当存在

一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^T & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ X(E_1 + E_2 K)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (E_1 + E_2 K)X \end{bmatrix} < 0$$

即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - X & (A + BK)X \\ X(A + BK)^T & -X + X(Q + K^T R K)X + \varepsilon^{-1} X(E_1 + E_2 K)^T (E_1 - E_2 K)X \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.16)$$

由矩阵的 Schur 补性质, 进一步得到 (7.2.16) 式等价于矩阵不等式 (7.2.13)。

定理后半部分的结论可由引理 7.2.1 的证明和定理 7.2.1 得到。定理得证。

基于定理 7.2.2 提供的二次保性能控制律的存在条件, 以下定理给出了二次保性能控制律的设计方法。

定理 7.2.3 系统 (7.2.1) 存在二次保性能控制律当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$ 、矩阵 W 和对称正定矩阵 X , 使得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - X & AX + BW & 0 & 0 & 0 \\ (AX + BW)^T & -X & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T \\ 0 & E_1 X + E_2 W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (7.2.17)$$

进而, 当矩阵不等式 (7.2.17) 有解 W 和 $X > 0$ 时, $u(k) = WX^{-1}x(k)$ 是系统 (7.2.1) 的一个二次保性能控制律, 相应的系统性能指标上界是 $\bar{J} \leq \text{Trace}(X^{-1})$ 。

证明 由矩阵的 Schur 补性质, (7.2.13) 式等价于

$$\begin{bmatrix} \varepsilon D D^T - X & (A + BK)X & 0 & 0 & 0 \\ X(A + BK)^T & -X & X(E_1 + E_2 K)^T & X & (KX)^T \\ 0 & (E_1 + E_2 K)X & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & KX & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

因此, 在上式中取 $W = KX$, 即得到矩阵不等式 (7.2.17)。定理得证。

不等式 (7.2.17) 是关于变量 ε 、 W 和 X 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 *feasp* 来求解线性矩阵不等式 (7.2.17) 的可行性问题, 并用得到的可行解来构造所求的二次保性能控制律。定理 7.2.3 提供了一组二次保性能控制律的一个参数化表示。

类似于连续系统的讨论, 以下定理给出了最优二次保性能控制律的设计方法。

定理 7.2.4 对给定的系统 (7.2.1) 和性能指标 (7.2.4), 如果以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon, X, S, W} z = \text{Trace}(S) \quad (7.2.18)$$

$$\text{s.t. (i)} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon DD^T - X & AX + BW & 0 & 0 & 0 \\ (AX + BW)^T & -X & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T \\ 0 & E_1 X + E_2 W & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} X & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0$$

有一个最优解 $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{S}, \tilde{X}, \tilde{W})$, 则 $u(k) = \tilde{W}\tilde{X}^{-1}x(k)$ 是系统 (7.2.1) 的最优二次保性能控制律, 相应的一个系统性能上界是 $J^* = \text{Trace}(\tilde{X}^{-1})$ 。

证明 类似于定理 7.1.3 的证明。

问题 (7.2.18) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解之。

例 7.2.1 考虑不确定离散系统 (7.2.1) 和性能指标 (7.2.4), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

要求设计该系统的最优保性能控制律。

根据定理 7.2.4, 通过建立和求解相应的优化问题 (7.2.18), 得到所考虑系统的最优保性能控制律

$$u(k) = [-0.4302 \quad 1.7989]x(k)$$

相应的系统性能上界 $J^* = 10.6892$ 。

如果不考虑系统的不确定性, 则相应的离散系统二次型最优控制问题的最优性能指标值是 $J^* = 8.9183$ 。显然, 系统不确定性的存在导致了性能的降低。保性能控制方法给出了这种性能衰减的一种定量度量。

7.3 具有闭环极点约束的保性能控制

在实际控制问题中, 为了达到满意的控制效果, 不仅要使控制系统具有好的稳态性能, 同时也要使控制系统的动态性能满足一定的要求, 诸如尽可能短的调节时间、小的超调等。这些过渡过程性能的要求可以通过将闭环系统的极点配置在复平面上的特定区域中来达到。为此, 结合闭环系统动态性能的考虑, 本节研究将闭环系统极点约束在一个给定

圆盘中的不确定系统保性能控制问题。事实上，这是一个多目标的鲁棒控制问题，可以通过第 6 章提出的方法来解决，即是将各种性能要求用一个线性矩阵不等式来刻画，进而采用一个单一的 Lyapunov 矩阵将各个线性矩阵不等式统一成为一个线性矩阵不等式系统，显然，这样的处理具有很大的保守性。这里，我们将利用圆盘的特性，将圆盘的极点约束和保性能要求有机地结合在一起，导出该问题的解。

7.3.1 鲁棒性能分析

考虑由以下状态方程描述的连续或离散系统：

$$\delta[x(t)] = (A + H\Delta E)x(t) \quad (7.3.1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量， δ 是一个算子，在连续系统中表示的是微分算子（即： $\delta[x(t)] = \dot{x}(t)$ ），在离散系统中表示的是前向算子（即 $\delta[x(t)] = x(t+1)$ ）。引进算子 δ 的目的是可以将连续系统和离散系统统一在一起考虑。 $\Delta \in \mathbf{R}^{i \times j}$ 是一个反映模型参数不确定性的未知矩阵，并假定其满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ ， A 、 H 和 E 是具有适当维数的常数实矩阵， $x_0 = x(0)$ 是系统的初始条件。

系统的性能指标是：对连续系统，

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt \quad (7.3.2a)$$

对离散系统，

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} x^T(t) Q x(t) \quad (7.3.2b)$$

其中 $Q = Q^T > 0$ 。

考虑复平面上中心在 $-\alpha + j0$ ，半径为 r 的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，圆盘 $D(\alpha, r)$ 总是位于系统的稳定区域中。因此，对连续系统， $\alpha > 0$ ， $r < \alpha$ ；而对离散系统， $-1 < -\alpha + r < 1$ 。

定义 7.3.1 对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ 和系统 (7.3.1)，如果存在对称正定矩阵 P ，使得对所有满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的不确定矩阵 Δ ，

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A + H\Delta E + \alpha I)/r \\ (A + H\Delta E + \alpha I)^T/r & -P \end{bmatrix} < 0$$

则系统 (7.3.1) 称为是二次 D-稳定的。

二次 D-稳定性不仅保证了系统是二次稳定的，而且保证了对所有允许的不确定性，系统的所有极点均在给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ 中。以下定义通过结合系统性能指标的考虑，推广了不确定系统的二次 D-稳定性概念。

定义 7.3.2 对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，系统 (7.3.1) 和性能指标 (7.3.2)，如果对所有满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的 Δ ，对称正定矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A + H\Delta E + \alpha I)/r \\ (A + H\Delta E + \alpha I)^T/r & -P + Q \end{bmatrix} < 0 \quad (7.3.3)$$

则矩阵 P 称为是系统 (7.3.1) 的一个二次 D-性能矩阵。

以下定理揭示了二次 D-性能矩阵的作用和性质。

定理 7.3.1 若不确定系统 (7.3.1) 存在一个二次 D-性能矩阵 P ，则该系统是二次 D-稳定的，且系统的性能指标满足：对连续系统，

$$J \leq x_0^T \left(\frac{\alpha}{r^2} P \right) x_0 \quad (7.3.4a)$$

对离散系统，

$$J \leq x_0^T \frac{P}{r^2} x_0 \quad (7.3.4b)$$

反之，如果系统 (7.3.1) 是二次 D-稳定的，则系统必存在一个二次 D-性能矩阵。

证明 首先证明连续系统的结论。假定矩阵 P 是系统 (7.3.1) 的一个二次 D-稳定性性能矩阵，则从不等式 (7.3.3) 和定义 7.3.1 即可得到系统 (7.3.1) 是二次 D-稳定的。根据定义 7.3.2 和矩阵的 Schur 补性质，矩阵不等式

$$(A + H\Delta E + \alpha I)^T P (A + H\Delta E + \alpha I) - r^2 P + r^2 Q < 0$$

对所有允许的不确定矩阵成立。从而，对所有允许的不确定性，

$$\begin{aligned} (A + H\Delta E)^T P + P(A + H\Delta E) &< -\frac{1}{\alpha} (A + H\Delta E)^T P (A + H\Delta E) - \frac{\alpha^2 - r^2}{\alpha} P - \frac{r^2}{\alpha} Q \\ &< -\frac{r^2}{\alpha} Q \\ &< 0 \end{aligned}$$

故系统 (7.3.1) 是二次稳定的。定义 $V(x) = x^T P x$ ，则沿系统 (7.3.1) 的任意轨线， $V(x)$ 关于时间的导数是

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T [(A + H\Delta E)^T P + P(A + H\Delta E)] x \\ &\leq x^T \left(-\frac{r^2}{\alpha} Q \right) x \end{aligned}$$

因此，

$$x^T \left(\frac{r^2}{\alpha} Q \right) x \leq -\dot{V}(x)$$

对上式从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 积分，并利用系统的二次稳定性，得到

$$\int_0^\infty x^T \left(\frac{r^2}{\alpha} Q \right) x dt \leq V(x(0)) = x_0^T P x_0$$

由此可以得到系统性能的上界 (7.3.4a)。

反之，若系统 (7.3.1) 是二次 D-稳定的，则根据定义 7.3.1，存在一个对称正定矩阵 P ，使得对所有允许的不确定矩阵 Δ ，矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A+H\Delta E+\alpha I)/r \\ (A+H\Delta E+\alpha I)^T/r & -P \end{bmatrix} < 0$$

成立。对固定的矩阵 $Q > 0$ ，一定存在一个足够大的常数 ρ ，使得对所有允许的不确定矩阵 Δ ，以下的矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} -(\rho P)^{-1} & (A+H\Delta E+\alpha I)/r \\ (A+H\Delta E+\alpha I)^T/r & -\rho P \end{bmatrix} < 0$$

定义 $\hat{P} = \rho P$ ，则矩阵 \hat{P} 是正定的，且根据定义 7.3.2，该矩阵就是系统 (7.3.1) 的一个二次 D-性能矩阵。

对离散系统，可以类似于以上连续系统的情形证明。定理得证。

注意 (7.3.4) 式给出的性能上界依赖于初始状态 x_0 ，为避免上界对个别初始状态的依赖，存在两种处理方法：一种是随机的处理方法，即在前两节所采用的方法；另一种是确定性方法，即假定系统的初始状态是未知的，但在集合 $A = \{x_0 \in \mathbf{R}^n : x_0 = Uv, v^T v \leq 1\}$ 中， U 是一个给定的矩阵。这里，我们将采用确定性的方法。这样，相应的系统性能上界是：对连续系统，

$$J \leq \frac{\alpha}{r^2} \lambda_{\max}(U^T P U) \quad (7.3.5a)$$

对离散系统，

$$J \leq \frac{1}{r^2} \lambda_{\max}(U^T P U) \quad (7.3.5b)$$

其中的 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的最大特征值。

以下定理给出了系统 (7.3.1) 存在一个二次 D-性能矩阵的条件。

定理 7.3.2 对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，系统 (7.3.1) 存在一个二次 D-性能矩阵当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$ 和一个对称正定矩阵 V ，使得

$$\begin{bmatrix} -V & (A+\alpha I)V & 0 & H & 0 \\ V(A+\alpha I)^T & -r^2 V & VE^T & 0 & rV(Q^{1/2})^T \\ 0 & EV & -I & 0 & 0 \\ H^T & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & rQ^{1/2}V & 0 & 0 & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.3.6)$$

证明 从定义 7.3.2，系统 (7.3.1) 存在一个二次 D-性能矩阵 P 当且仅当对所有允许的不确定性，矩阵不等式 (7.3.3) 成立。容易验证矩阵不等式 (7.3.3) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A+\alpha I+H\Delta E \\ (A+\alpha I+H\Delta E)^T & -r^2 P+r^2 Q \end{bmatrix} < 0$$

该不等式可以重新写成

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A+\alpha I \\ (A+\alpha I)^T & -r^2 P+r^2 Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix}^T \Delta^T \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (7.3.7)$$

根据引理, 不等式 (7.3.7) 对满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的所有不确定矩阵 Δ 成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A+\alpha I \\ (A+\alpha I)^T & -r^2 P+r^2 Q \end{bmatrix} + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix} < 0$$

即

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} + \varepsilon^{-1} H H^T & A+\alpha I \\ (A+\alpha I)^T & -r^2 P+r^2 Q + \varepsilon E^T E \end{bmatrix} < 0$$

对上式分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} I & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon} P^{-1} \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix} \varepsilon P^{-1} + H H^T & \varepsilon (A+\alpha I) P^{-1} \\ \varepsilon P^{-1} (A+\alpha I)^T & -r^2 \varepsilon P^{-1} + r^2 \varepsilon P^{-1} Q P^{-1} + \varepsilon^2 P^{-1} E^T E P^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

记 $V = \varepsilon P^{-1}$, 应用矩阵的 Schur 补性质, 得上式等价于矩阵不等式 (7.3.6)。定理得证。

不等式 (7.3.6) 是关于变量 V 和 ε 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的线性矩阵不等式求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式的可行性问题。

从定理的证明可以知道, 如果 $\tilde{V}, \tilde{\varepsilon}$ 是线性矩阵不等式 (7.3.6) 的一个可行解, 则 $P = \tilde{\varepsilon} \tilde{V}^{-1}$ 是系统 (7.3.1) 的一个二次 D-性能矩阵。因此, 相应的系统性能上界分别是: 对连续系统,

$$J \leq \frac{\alpha \tilde{\varepsilon}}{r^2} \lambda_{\max}(U^T \tilde{V}^{-1} U) \quad (7.3.8a)$$

对离散系统,

$$J \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{r^2} \lambda_{\max}(U^T \tilde{V}^{-1} U) \quad (7.3.8b)$$

7.3.2 二次 D-保性能控制器设计

考虑以下的不确定系统:

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= (A + H_1 \Delta E_1)x(t) + (B + H_1 \Delta E_2)u(t) \\ y(t) &= (C + H_2 \Delta E_1)x(t) + (D + H_2 \Delta E_2)u(t) \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 、 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $y(t) \in \mathbf{R}^p$ 分别是系统的状态向量、控制输入和测量输出, A 、 B 、 C 、 D 、 E_1 、 E_2 、 H_1 和 H_2 是具有适当维数的实常数矩阵, $\Delta \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的不确定参数矩阵, 初始条件 $x(0) = x_0$ 假定是未知的, 但属于集合 $A = \{x_0 \in \mathbf{R}^n: x_0 = Uv, v^T v \leq 1\}$ 中, 其中 U 是一个给定的矩阵。

考虑的系统性能指标是：对连续系统，

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (7.3.10a)$$

对离散系统，

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] \quad (7.3.10b)$$

其中： \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是给定的对称正定加权矩阵。

对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，我们将考虑系统 (7.3.9) 的输出反馈二次 D-保性能控制问题，即设计一个输出反馈控制器，使得所导出的闭环系统存在一个二次 D-性能矩阵。为此，考虑具有以下状态空间实现的一个满阶输出反馈控制器：

$$\begin{aligned} \delta[\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)] &= \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{y}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

$\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是控制器的状态向量， \mathbf{A}_c 、 \mathbf{B}_c 和 \mathbf{C}_c 是待定的控制器系数矩阵。将控制器 (7.3.11) 应用到系统 (7.3.9)，得到的闭环系统是

$$\delta[\bar{\mathbf{x}}(t)] = (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{H}} \Delta \bar{\mathbf{E}}) \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (7.3.12)$$

其中：

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C} & \mathbf{A}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{D} \mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \mathbf{C}_c]$$

相应的闭环性能指标是：对连续系统，

$$J = \int_0^{\infty} \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) dt \quad (7.3.13a)$$

对离散系统，

$$J = \sum_{t=0}^{\infty} \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (7.3.13b)$$

其中

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_c^T \mathbf{R} \mathbf{C}_c \end{bmatrix}$$

定义 7.3.3 对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，考虑系统 (7.3.9) 和性能指标 (7.3.10)，一个形如 (7.3.11) 的控制器称为是系统 (7.3.9) 的一个具有性能矩阵 $\bar{\mathbf{P}}$ 的输出反馈二次 D-保性能控制器：如果矩阵 $\bar{\mathbf{P}}$ 是正定的，且是相应的闭环系统 (7.3.12) 和性能指标 (7.3.13) 的一个二次 D-性能矩阵。

根据前面鲁棒性能分析的结果，如果 (7.3.11) 是系统 (7.3.9) 的一个二次 D-保性能控制器，则所导出的闭环不确定系统是二次稳定的，且所有的闭环极点均在圆盘区域 $D(\alpha, r)$ 中，进而对所有允许的不确定性，闭环性能指标值不超过一个确定的上界。

根据定理 7.3.2，可以得到二次 D-保性能控制器的存在条件：

定理 7.3.3 对给定的圆盘 $D(\alpha, r)$ ，系统 (7.3.9) 存在一个输出反馈二次 D-保性能控

制器 (7.3.11) 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$ 和对称正定矩阵 \bar{V} , 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{V} & (\bar{A} + \alpha I)\bar{V} & \bar{H} & 0 & 0 \\ \bar{V}(\bar{A} + \alpha I) & -r^2\bar{V} & 0 & \bar{V}\bar{E}^\top & r\bar{V}\hat{Q}^\top \\ \bar{H}^\top & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}\bar{V} & 0 & -I & 0 \\ 0 & r\hat{Q}\bar{V} & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.3.14)$$

其中:

$$\bar{Q} = \hat{Q}^\top \hat{Q}, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} C_c \end{bmatrix}$$

一般地, 可以从控制器的存在条件来导出控制器的设计方法。然而在控制器存在条件的矩阵不等式 (7.3.14) 中, 矩阵 \bar{V} 、标量 ε 以及进入到闭环系统矩阵 \bar{A} 、 \bar{H} 、 \bar{E} 和闭环性能指标的加权矩阵 \hat{Q} 中的控制器参数矩阵 A_c 、 B_c 、 C_c 是未知变量, 并以非线性的方式耦合在一起。因此, 这个不等式不是未知变量的一个线性矩阵不等式, 这给控制器参数的确定带来了一定困难。以下我们应用第 5 章介绍的变量替换方法来设法将矩阵不等式 (7.3.14) 转换成和控制器参数矩阵等价的一组新变量的一个线性矩阵不等式, 从而可以应用 LMI 工具箱中的相关工具得到这组新变量的解, 进而得到控制器参数矩阵的值。

首先将矩阵 \bar{V} 和它的逆分块:

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^\top & W \end{bmatrix}, \quad \bar{V}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^\top & Z \end{bmatrix}$$

其中: $X, Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵。由等式 $\bar{V}^{-1}\bar{V} = I$ 可以得到

$$MN^\top = I - XY \quad (7.3.15)$$

定义

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^\top \end{bmatrix}$$

则可以得到关系式:

$$\bar{V}F_1 = F_2, \quad F_1^\top \bar{V}F_1 = F_2^\top F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (7.3.16)$$

定义以下的一组新变量:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= XAY + X\hat{B}\hat{C} + \hat{B}CY + MA_cN^\top + \hat{B}D\hat{C} \\ \hat{B} &= MB_c \\ \hat{C} &= C_cN^\top \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

则对给定的对称正定矩阵 X 、 Y 和非奇异矩阵 M 、 N , 从矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 可唯一地确定控制器参数矩阵 A_c 、 B_c 和 C_c 。另一方面, 通过矩阵运算, 可以得到以下的关系式:

$$\begin{aligned}
 F_1^T \bar{A} \bar{V} F_1 &= \begin{bmatrix} XA + \hat{B}C & \hat{A} \\ A & AY + B\hat{C} \end{bmatrix}, & F_1^T \bar{V} \bar{E}^T &= \begin{bmatrix} E_1^T \\ YE_1^T + \hat{C}^T E_2^T \end{bmatrix} \\
 F_1^T \bar{V} \hat{Q}^T &= \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ YQ^{1/2} & \hat{C}^T R^{1/2} \end{bmatrix}, & F_1^T \bar{H} &= \begin{bmatrix} XH_1 + \hat{B}H_2 \\ H_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

以下定理给出了输出反馈二次 D-保性能控制器的设计方法。

定理 7.3.4 对给定的圆盘 $D(a, r)$, 系统 (7.3.9) 存在输出反馈二次 D-保性能控制器 (7.3.11) 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 对称正定矩阵 X 和 Y , 矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 和 \hat{C} , 使得

$$\begin{bmatrix}
 -X & -I & XA + \hat{B}C + \alpha X & \hat{A} + \alpha I \\
 * & -Y & A + \alpha I & AY + B\hat{C} + \alpha Y \\
 * & * & -r^2 X & -r^2 I \\
 * & * & * & -r^2 Y \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 XH_1 + \hat{B}H_2 & 0 & 0 & 0 \\
 H_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & E_1^T & rQ^{1/2} & 0 \\
 0 & YE_1^T + \hat{C}^T E_2^T & rYQ^{1/2} & r\hat{C}^T R^{1/2} \\
 -I & 0 & 0 & 0 \\
 * & -I & 0 & 0 \\
 * & * & -\varepsilon I & 0 \\
 * & * & * & -\varepsilon I
 \end{bmatrix} < 0 \quad (7.3.19)$$

其中的*是由矩阵的对称性得到的矩阵块。

证明 分别用矩阵

$$\begin{bmatrix}
 F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & F_1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & I
 \end{bmatrix}$$

和它的转置矩阵右乘和左乘不等式 (7.3.14), 并利用关系式 (7.3.16) 和 (7.3.18), 即可得到定理的结论。定理得证。

容易看到 (7.3.19) 是关于其中所有未知变量的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断该线性矩阵不等式是否可行, 并进而得到它的一个可行解。利用线性矩阵不等式 (7.3.19) 的可行解, 按照以下的步骤可以得到所要求的输出反馈二次 D-保性能控制器:

1. 通过 $I - XY$ 的奇异值分解, 可以得到满足等式 (7.3.15) 的非奇异矩阵 M 和 N ;
2. 利用上一步得到的非奇异矩阵 M 和 N 以及 (7.3.19) 的可行解, 通过求解 (7.3.17) 可以得到控制器矩阵 A_c 、 B_c 和 C_c 的值。

对这样得到的一个控制器, 相应的闭环系统性能指标值满足: 对连续系统,

$$J \leq \frac{\alpha \varepsilon}{r^2} \lambda_{\max}(U^T X U) \quad (7.3.20a)$$

对离散系统,

$$J \leq \frac{\varepsilon}{r^2} \lambda_{\max}(U^T X U) \quad (7.3.20b)$$

由 (7.3.20) 式给出的系统性能上界关于 X 和 ε 并不是线性的。为了计算上的便利, 通过建立以下的一个优化问题:

$$\begin{aligned} \min z &= \varepsilon + \lambda \\ \text{s.t. (i)} & \quad (7.1.19) \\ & \quad \text{(ii)} \quad U^T X U < \lambda I \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

可以求解使得性能指标上界尽可能小的最优二次 D-保性能控制器。问题 (7.3.21) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。得到的是一个次优二次 D-保性能控制器。

例 7.3.1 考虑一个倒立摆系统 (如图 7.1 所示)。该对象的一个离散化模型是:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1.0544 & 0.1018-0.08\gamma & 0 & 0.0-0.08\gamma \\ 1.0975 & 1.0544-0.8\gamma & 0 & 0.0-0.8\gamma \\ -0.0050 & -0.0002+0.08\gamma & 1 & 0.1+0.08\gamma \\ -0.0998 & -0.0049+0.8\gamma & 0 & 1.0+0.8\gamma \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.05 \\ -1.0 \\ 0.05 \\ 1.0 \end{bmatrix} u(k) \\ p(k) &= \begin{bmatrix} 57.2958 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned} \quad (7.3.22)$$

其中: $x = [\theta \ \dot{\theta} \ y \ \dot{y}]^T \in \mathbb{R}^4$ 是系统的状态向量, θ 是摆杆的偏移角, y 是小车的位移, $u \in \mathbb{R}$ 是作用在小车上的力, $p \in \mathbb{R}^2$ 是测量输出, γ 出现在模型中的不确定参数, 满足 $|\gamma| \leq 0.5$, 假定初始状态 x_0 是不确定的, 但满足 $x_0^T x_0 \leq 1$ 。

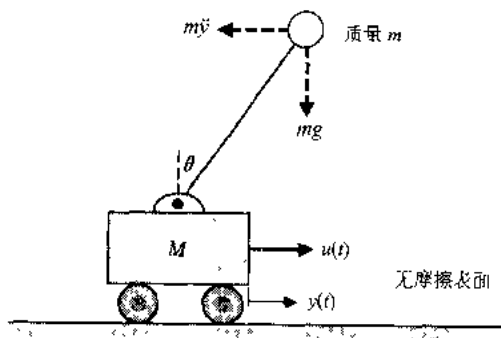


图 7.1 倒立摆系统

要求设计一个适当的输出反馈控制器 (7.3.11), 使得对所有满足 $|\gamma| \leq 0.5$ 的不确定参数取值, 闭环系统的所有极点均位于中心在 $0.5 + j0$ 、半径为 $r = 0.5$ 的圆盘中, 同时使得性能指标

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [2x_1^2(k) + 2x_2^2(k) + 0.5x_3^2(k) + 0.5x_4^2(k) + 0.01u^2(k)] \quad (7.3.23)$$

是有界的, 且确定一个尽可能小的上界。以下我们应用定理 7.3.4 来寻找该系统的一个最优二次 D-保性能控制器。定义矩阵:

$$\begin{aligned} H_1 &= [-0.08 \quad -0.8 \quad 0.08 \quad 0.8]^T \\ E_1 &= [0 \quad 0.5 \quad 0 \quad 0.5], \quad H_2 = E_2 = 0 \\ Q &= \text{diag}\{2, 2, 0.5, 0.5\}, \quad R = 0.01 \end{aligned}$$

则系统 (7.3.22) 可以写成 (7.3.9) 的形式。通过求解相应的优化问题 (7.3.21), 可以得到该问题的最优解。进而, 根据定理 7.3.4 可以构造出所要求的控制器:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.2129 & 0.0783 & 0.0830 & -0.7470 \\ -0.4942 & 0.6303 & -0.0292 & -0.0476 \\ 3.5815 & -1.1164 & 0.7969 & 0.0948 \\ 1.2121 & 0.1218 & 0.2057 & -1.3057 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0257 & -2.9187 \\ 0.0559 & -4.9219 \\ -1.0069 & 0.1760 \\ -0.2434 & 4.5105 \end{bmatrix} p(k) \\ u(k) &= [1.0360 \quad -0.3522 \quad 0.2649 \quad -2.6485] \hat{x}(k) \end{aligned}$$

相应的闭环性能指标值满足 $J \leq 5.002 \times 10^8$ 。对不确定参数 γ 的各个允许值, 闭环系统的极点分布如图 7.2 所示。

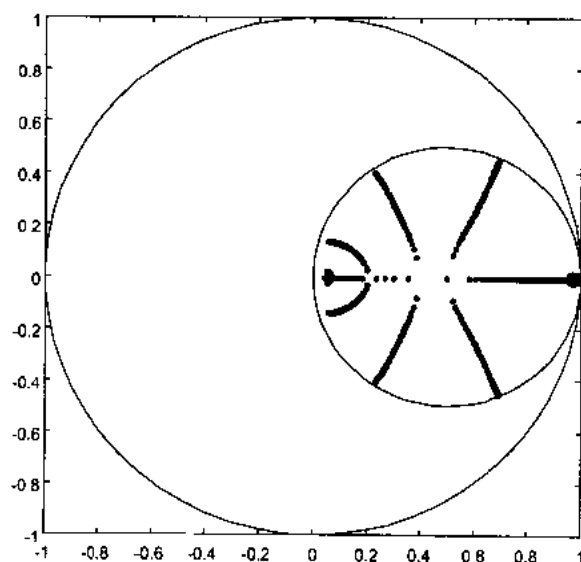


图 7.2 闭环极点分布图

第 8 章 鲁棒方差控制

协方差分析已渗入到系统理论的几乎所有领域中，起着越来越重要的作用。特别地，协方差分析也是系统辨识、状态估计、模型降阶等系统分析和控制中的主要工具。

工程系统中的许多性能指标可以用系统状态的方差来表示，辨识、参数估计、模型降阶等方面的许多理论和方法也采用状态或输出的协方差来作为性能的度量指标。因此，通过使系统的状态或输出具有一定的协方差可以保证系统满足一定的性能要求，同时也能将系统的建模与控制问题很好地统一起来。这种通过配置系统状态或输出协方差矩阵的控制就是系统的协方差控制（Hotz 和 Skelton, 1987）。协方差控制提出后，已得到了广泛的研究，取得了一系列研究结果。本章将研究不确定系统的具有闭环方差和极点约束的鲁棒控制问题，给出基于线性矩阵不等式的控制器存在条件和求解方法。

8.1 连续系统的鲁棒方差控制

现有的方差控制理论提供了所有可配置状态方差的一个刻画，且给出了闭环系统具有给定可配置稳态状态方差的所有方差控制器的一个参数化表示。然而，一个实际对象的数学模型不可避免地存在一定程度的参数不确定性。对这样的具有参数不确定性的系统，要严格地配置其稳态状态方差是不现实的。通常，可以通过使其稳态状态方差不超过某个给定上界来保证闭环系统具有所期望的性能。另一方面，一个系统除了需具有良好的稳态特性外，还需具有良好的瞬态性能，以保证过渡过程的品质要求。而系统的瞬态性能可以由其极点位置所确定，因此，具有方差和区域极点约束的鲁棒方差控制问题更具研究和应用的价值。

8.1.1 系统性能分析

考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + Dw(t) \\ &= (A + \Delta A)x(t) + Dw(t)\end{aligned}\quad (8.1.1)$$

其中： $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量， $w(t) \in \mathbf{R}^l$ 是外部扰动， A 和 D 是适当维数的常数矩阵， $w(t)$ 是一个具有单位方差的零均值白噪声过程，且 $w(t)$ 和初始状态 $x(0)$ 是不相关的， ΔA 是反映系统模型中参数不确定性的未知矩阵，并假定其具有以下的结构形式：

$$\Delta A = MFN_1 \quad (8.1.2)$$

其中: $F \in \mathbf{R}^{n \times J}$ 是满足 $FF^T \leq I$ 的不确定矩阵, M 和 N_1 是已知的常数矩阵, 描述了不确定参数影响系统模型的结构方式。

记 $D(q, r)$ 是左半开复平面中的中心在 $-q + j0$ ($q > 0$)、半径为 r ($r < q$) 的圆盘, 则本节关心的问题是导出系统 (8.1.1) 鲁棒性能分析的条件, 即在该条件下, 对所有满足 $FF^T \leq I$ 的不确定矩阵 F , 系统 (8.1.1) 具有如下性质:

(A1) 所有极点位于圆盘 $D(q, r)$ 中;

(A2) $[X]_{ii} < \sigma_i^2$, ($i=1, 2, \dots, n$)。

其中: σ_i ($i=1, 2, \dots, n$) 是给定的一组常数, $[X]_{ii}$ 是稳态状态方差矩阵 $X = \lim_{t \rightarrow \infty} E[x(t)x^T(t)]$ 的对角线上的第 i 个元, $E(\cdot)$ 表示期望算子。

容易看到: 如果系统 (8.1.1) 是渐近稳定的, 则系统 (8.1.1) 的稳态状态方差矩阵 X 存在。进一步, 由于 $w(t)$ 是一个具有单位方差的零均值白噪声过程, 且 $w(t)$ 和初始状态 $x(0)$ 是不相关的, 可得 X 满足以下的 Lyapunov 方程

$$\bar{A}X + X\bar{A}^T + DD^T = 0 \quad (8.1.3)$$

以下定理给出了系统 (8.1.1) 具有给定鲁棒性能的条件。

引理 8.1.1 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和系统 (8.1.1), 如果存在对称正定矩阵 P , 使得对所有允许的不确定性, 以下矩阵不等式

$$\left(\frac{\bar{A} + qI}{r} \right) P \left(\frac{\bar{A} + qI}{r} \right)^T - P + \frac{q}{r^2} DD^T < 0 \quad (8.1.4)$$

成立, 则系统 (8.1.1) 的所有极点均位于圆盘 $D(q, r)$ 中, 且系统 (8.1.1) 的稳态状态方差矩阵满足 $X < P$ 。

证明 从矩阵不等式 (8.1.4) 可推出

$$\left(\frac{\bar{A} + qI}{r} \right) P \left(\frac{\bar{A} + qI}{r} \right)^T - P < 0$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 从上式可得矩阵 $(\bar{A} + qI)/r$ 的所有特征值均在单位圆盘内, 由此即得矩阵 \bar{A} 的所有极点均位于圆盘 $D(q, r)$ 中。

另一方面, 经整理, 矩阵不等式 (8.1.4) 可等价地写成

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + q^{-1}[\bar{A}P\bar{A}^T + (q^2 - r^2)P] + DD^T < 0 \quad (8.1.5)$$

因此, 系统 (8.1.1) 是渐近稳定的。从而系统 (8.1.1) 的稳态状态方差矩阵 X 存在, 且满足 (8.1.3) 式。将 (8.1.5) 式减去 (8.1.3) 式, 可得

$$\bar{A}(P - X) + (P - X)\bar{A}^T + q^{-1}[\bar{A}P\bar{A}^T + (q^2 - r^2)P] < 0$$

由于 $\bar{A}P\bar{A}^T + (q^2 - r^2)P > 0$, 故从 Lyapunov 稳定性理论可得 $X < P$ 。综合以上两部分的证明, 引理得证。

引理 8.1.1 的条件依赖于不确定矩阵 F , 难以验证。以下通过将引理 8.1.1 的条件转化为一个线性矩阵不等式的可行性问题, 导出一个不依赖不确定参数的等价条件。

引理 8.1.2 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和系统 (8.1.1), 存在对称正定矩阵 P , 使得对所

有允许的不确定性, 矩阵不等式 (8.1.4) 成立当且仅当存在一个正常数 ε , 使得

$$\begin{bmatrix} -rP & PA^T + qP & PN_1^T \\ AP + qP & -rP + qr^{-1}DD^T + \varepsilon MM^T & 0 \\ N_1P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.6)$$

证明 由矩阵的 Schur 补性质, 存在正定矩阵 P , 使得矩阵不等式 (8.1.4) 成立当且仅当

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & r^{-1}(\bar{A} + qI)^T \\ r^{-1}(\bar{A} + qI) & -P + qr^{-2}DD^T \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.7)$$

在上式两边分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} \sqrt{r}P & 0 \\ 0 & \sqrt{r}I \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} -rP & P(\bar{A} + qI)^T \\ (\bar{A} + qI)P & -rP + qr^{-1}DD^T \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.8)$$

由于 $\bar{A} = A + \Delta A = A + MFN_1$, 记

$$Y = \begin{bmatrix} -rP & PA^T + qP \\ AP + qP & -rP + qr^{-1}DD^T \end{bmatrix}$$

则 (8.1.8) 式可以重新写成

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} N_1P & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PN_1^T \\ 0 \end{bmatrix} F^T \begin{bmatrix} 0 & M^T \end{bmatrix} < 0$$

根据引理 5.4.1, 上式对所有满足 $FF^T \leq I$ 的矩阵 F 成立当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} N_1P & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_1P & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}^T < 0 \quad (8.1.9)$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 可得 (8.1.9) 式等价于矩阵不等式 (8.1.6)。引理得证。

根据以上的分析结果, 可以得到系统 (8.1.1) 具有性能 (A1) 和 (A2) 的条件。

定理 8.1.1 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和一组常数 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 若存在常数 $\varepsilon > 0$ 和对称矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} -rP & PA^T + qP & PN_1^T \\ AP + qP & -rP + qr^{-1}DD^T + \varepsilon MM^T & 0 \\ N_1P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.10)$$

$$[P]_{ii} < \sigma_i^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.1.11)$$

成立, 则对所有允许的不确定性, 系统 (8.1.1) 满足性能要求 (A1) 和 (A2)。

证明 可以从引理 8.1.1 和 8.1.2 得到定理的结论。

矩阵不等式 (8.1.10) 和 (8.1.11) 是 ε 和 P 的一个线性矩阵不等式系统, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式系统的可行性问题, 从而判断系统 (8.1.1) 是否具有性质 (A1) 和 (A2)。

8.1.2 状态反馈控制器设计

考虑系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + Dw(t) \quad (8.1.12)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $w(t) \in \mathbf{R}^l$ 是外部扰动, A 、 B 和 D 是适当维数的常数矩阵, $w(t)$ 是一个具有单位方差的零均值白噪声过程, 且 $w(t)$ 和初始状态 $x(0)$ 是不相关的, ΔA 和 ΔB 是反映系统模型中参数不确定性的未知矩阵, 并假定其具有以下结构形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = MF[N_1 \quad N_2] \quad (8.1.13)$$

其中: $F \in \mathbf{R}^{k \times j}$ 是满足 $FF^T \leq I$ 的不确定矩阵, M 、 N_1 和 N_2 是已知的常数矩阵。

假定系统的状态是可以直接测量的, 则本小节要研究的问题是对给定的系统 (8.1.12), 圆盘 $D(q, r)$ 和一组常数 σ_i ($i=1, 2, \dots, n$), 设计一个状态反馈控制律

$$u(t) = Gx(t) \quad (8.1.14)$$

使得对所有允许的不确定性, 闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A_c + \Delta A_c)x(t) + Dw(t) \quad (8.1.15)$$

具有性能 (A1) 和 (A2)。这样的控制律 (8.1.14) 称为不确定系统 (8.1.12) 的一个鲁棒方差控制律。

根据上一小节提出的鲁棒性能分析结果, 可以得到使得闭环系统满足设计要求 (A1) 和 (A2) 的状态反馈鲁棒方差控制律 (8.1.14) 的存在条件和设计方法。

定理 8.1.2 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和一组常数 σ_i ($i=1, 2, \dots, n$), 若存在常数 $\varepsilon > 0$ 、矩阵 Y 和对称矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} -rP & (AP + BY + qP)^T & (N_1P + N_2Y)^T \\ AP + BY + qP & -rP + qr^{-1}DD^T + \varepsilon MM^T & 0 \\ N_1P + N_2Y & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.16)$$

$$[P]_{ii} < \sigma_i^2, \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (8.1.17)$$

则 $u(t) = YP^{-1}x(t)$ 是不确定系统 (8.1.12) 的一个具有给定性能的鲁棒方差控制律。

证明 对闭环系统应用定理 8.1.1, 并记 $Y = GP$, 即可得所要的结论。定理得证。

矩阵不等式 (8.1.16) 和 (8.1.17) 是关于变量 P 、 Y 和 ε 的一个线性矩阵不等式系统, 因此, 定理条件的检验和控制器的设计转化成了求解该线性矩阵不等式系统的问题。

而后者可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解, 利用得到的可行解可以构造出系统的鲁棒方差控制器。

定理 8.1.2 用一组线性矩阵不等式约束刻画了鲁棒方差控制律的存在条件, 并用它的可行解给出了一组鲁棒方差控制律的参数化表示。利用这一表示, 通过附加一些约束条件, 可以有效地求取具有其他性能要求的鲁棒方差控制律。特别地, 以下将利用这一性质来设计具有最小能量的鲁棒方差控制律。

在实际应用中, 具有最小能量的方差控制器是更有意义的。最小能量方差控制器是使得性能指标

$$J(u) = \sup_F \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[E(u^T(t) R u(t)) \right]^{1/2} \right\}$$

最小化的鲁棒方差控制器, 其中 R 是一个给定的正定加权矩阵。

由定理 8.1.2 导出的鲁棒方差控制律具有形式 $u(t) = YP^{-1}x(t)$, 且 $X < P$, 故

$$\begin{aligned} J^2(u) &= \sup_F \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} E[x^T(t) P^{-1} Y^T R Y P^{-1} x(t)] \right\} \\ &= \sup_F \left\{ \text{Trace}[Y P^{-1} X P^{-1} Y^T R] \right\} \\ &\leq \text{Trace}[S Y P^{-1} (S Y)^T] \end{aligned}$$

其中 $R = S^T S$ 。因此, 可以通过使得 $J^2(u)$ 的上界 $\text{Trace}[S Y P^{-1} (S Y)^T]$ 最小化的方法来求取具有尽可能小能量的控制器。

定理 8.1.3 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和一组常数 σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 若以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon, P, Y, H} \text{Trace}(H) \quad (8.1.18)$$

$$\text{s.t. (i) } \begin{bmatrix} -H & SY \\ (SY)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{(ii) (8.1.16)}$$

$$\text{(iii) (8.1.17)}$$

有解 $\varepsilon^*, P^*, Y^*, H^*$, 则 $u(t) = Y^*(P^*)^{-1}x(t)$ 是一个具有最小能量的鲁棒方差控制器。

证明 事实上, 优化问题 (8.1.18) 中的约束条件 (i) 等价于 $S Y P^{-1} (S Y)^T < H$, 因此, $\text{Trace}(H)$ 的最小化将保证 $\text{Trace}[S Y P^{-1} (S Y)^T]$ 的最小化。据此及定理 8.1.2, 可得证本定理。

优化问题 (8.1.18) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以保证达到全局的最优解。进而, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求解该问题。

例 8.1.1 考虑不确定系统 (8.1.12), 其中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ M &= 0.5I_3, \quad N_1 = 0.5I_3, \quad N_2 = B \end{aligned}$$

要求设计一个状态反馈控制器,使得对所有允许的不确定性,闭环系统的极点均在圆盘 $D(3, 2)$ 中,且稳态状态方差满足

$$[X]_{11} \leq 1.025, \quad [X]_{22} \leq 4.327, \quad [X]_{33} \leq 0.918$$

根据定理 8.1.2,通过求解相应的线性矩阵不等式系统,可以得到使得闭环系统具有所期望性质的鲁棒方差控制律:

$$\bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -0.3001 & -0.3271 \\ 0 & -0.0097 & -3.6703 \end{bmatrix} x(t)$$

进一步,如果要求控制器的能量尽可能小,则可以通过求取系统的最小能量方差控制器来达到。根据定理 8.1.3,通过应用求解器 mincx 求解相应的优化问题 (8.1.18) (取加权矩阵 $R=I$),可得系统的最小能量方差控制器是

$$u^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.0005 & -0.0329 \\ 0 & -0.0031 & -3.6799 \end{bmatrix} x(t)$$

相应的控制能量上界是 $J^2(u) \leq 0.0295$,而前面得到的控制律 \bar{u} 的控制能量上界是 $J^2(\bar{u}) \leq 8.0698$ 。

8.1.3 输出反馈控制器设计

这一小节将研究输出反馈鲁棒方差控制器设计问题。考虑由以下状态空间模型描述的一类不确定系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + Dw(t) \\ y(t) &= C_1 x(t) \\ z(t) &= C_2 x(t) \end{aligned} \quad (8.1.19)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ 是测量输出, $z(t) \in \mathbf{R}^q$ 是被调输出, $w(t) \in \mathbf{R}^l$ 是一个具有单位密度的零均值白噪声过程,并假定和系统的初始状态 $x(0)$ 是不相关的。 A 、 B 、 C_1 、 C_2 和 D 是已知的具有适当维数的实数矩阵, ΔA 和 ΔB 是表示系统模型中参数不确定性的未知实矩阵,并假定具有形式 (8.1.13)。

考虑一个具有以下状态空间实现的输出动态反馈控制器

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c x_c(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (8.1.20)$$

其中: $x_c(t) \in \mathbf{R}^n$ 是控制器的状态, A_c 、 B_c 、 C_c 和 D_c 是待定的适当维数实矩阵。将控制器 (8.1.20) 应用于系统 (8.1.19),得到的闭环系统是

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= (\bar{A} + \bar{M}\bar{F}\bar{N})\bar{x}(t) + \bar{D}w(t) \\ z(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (8.1.21)$$

其中:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C_1 & BC_c \\ B_c C_1 & A_c \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N} = [N_1 + N_2 D_c C_1 \quad N_2 C_c], \quad \bar{C} = [C_2 \quad 0]$$

这里要研究的问题是：对给定的系统 (8.1.19)、圆盘 $D(q, r)$ 和一个给定的对称矩阵 U ，设计一个输出反馈控制器 (8.1.20)，使得对所有允许的不确定性，闭环系统满足以下条件：

- (i) 所有的闭环极点均在圆盘 $D(q, r)$ 中；
- (ii) 闭环稳态输出协方差满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z^T(t)] < U \quad (8.1.22)$$

这样一个问题称为是系统 (8.1.19) 的一个具有闭环极点约束的鲁棒协方差控制问题。使得闭环系统具有以上性质 (i) 和 (ii) 的控制器 (8.1.20) 称为系统 (8.1.19) 的鲁棒协方差控制器。

当 $C_1 = C_2 = I$ 时，以上的鲁棒协方差控制问题就转化为一个鲁棒方差状态反馈控制问题。

类似于定理 8.1.1 的推导，可以得到以下引理。

引理 8.1.3 对系统 (8.1.21) 和一个给定的圆盘 $D(q, r)$ ，如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 和一个对称正定矩阵 P ，使得

$$\begin{bmatrix} -rP & P\bar{A}^T + qP & P\bar{N}^T & 0 & 0 \\ * & -rP & 0 & \bar{D} & \bar{M} \\ * & * & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ * & * & * & -rq^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.23)$$

其中，*表示由矩阵的对称性得到的子块。则对所有允许的不确定性，系统的所有极点均位于圆盘 $D(q, r)$ 中。进而，系统 (8.1.21) 的稳态状态协方差矩阵 $X = \lim_{t \rightarrow \infty} E[\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)]$ 存在，且满足 $X < P$ 。

基于引理 8.1.3，以下定理给出了系统 (8.1.19) 存在输出反馈鲁棒协方差控制器的条件。

定理 8.1.4 考虑闭环系统 (8.1.21)，对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和一个对称矩阵 U ，如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 和一个对称正定矩阵 P ，使得矩阵不等式 (8.1.23) 和

$$\begin{bmatrix} -U & \bar{C}P \\ P\bar{C}^T & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.24)$$

成立，则控制器 (8.1.20) 是系统 (8.1.19) 的一个鲁棒协方差控制器。

证明 由条件和引理 8.1.3 可得闭环系统的所有极点位于圆盘 $D(q, r)$ 中，且 $X < P$ 。另一方面，由矩阵的 Schur 补性质，矩阵不等式 (8.1.24) 等价于 $\bar{C}P\bar{C}^T < U$ 。因此， $\lim_{t \rightarrow \infty} E[z(t)z^T(t)] = \bar{C}X\bar{C}^T < U$ 。定理得证。

在矩阵不等式 (8.1.23) 中, 标量 ε 、矩阵 P 和进入到矩阵 \bar{A} 、 \bar{M} 、 \bar{N} 中的矩阵 A_c 、 B_c 、 C_c 、 D_c 是未知的, 但这些未知变量是以非线性的方式出现在该矩阵不等式中, 因此 (8.1.23) 式不是这些未知变量的一个线性矩阵不等式。以下, 我们将采用第 5 章中提出的变量替换方法, 将矩阵不等式 (8.1.23) 转换成关于变量 P 、 A_c 、 B_c 、 C_c 和 D_c 的一个线性矩阵不等式。为此, 首先将矩阵 P 和它的逆作以下分块

$$P = \begin{bmatrix} Y & S \\ S^T & W \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & T \\ T^T & Z \end{bmatrix}$$

其中: $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称矩阵。由等式 $P^{-1}P = I$ 可以得到

$$TS^T = I - XY \quad (8.1.25)$$

定义

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ T^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & S^T \end{bmatrix}$$

则通过矩阵运算可以得到

$$P\Phi_1 = \Phi_2, \quad \Phi_1^T P \Phi_1 = \Phi_2^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (8.1.26)$$

定义一组新变量

$$\begin{aligned} \hat{A} &= X(A + BD_c C_1)Y + XBC_c S^T + TB_c C_1 Y + TA_c S^T \\ \hat{B} &= XBD_c + TB_c \\ \hat{C} &= D_c C_1 Y + C_c S^T \\ \hat{D} &= D_c \end{aligned} \quad (8.1.27)$$

则对给定的正定矩阵 X 、 Y 和可逆矩阵 S 、 T , 控制器参数矩阵 A_c 、 B_c 、 C_c 和 D_c 可以由 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 和 \hat{D} 惟一确定。进一步通过矩阵运算, 可以得到:

$$\begin{aligned} \Phi_1^T \bar{A} P \Phi_1 &= \begin{bmatrix} XA + \hat{B}C_1 & \hat{A} \\ A + B\hat{D}C_1 & AY + B\hat{C} \end{bmatrix} \\ \Phi_1^T P \bar{N}^T &= \begin{bmatrix} N_1^T + C_1^T \hat{D}^T N_2^T \\ YN_1^T + \hat{C}^T N_2^T \end{bmatrix} \\ \Phi_1^T \bar{D} &= \begin{bmatrix} XD \\ D \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^T \bar{M} = \begin{bmatrix} XM \\ M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.1.28)$$

综合以上分析, 可以得到:

定理 8.1.5 考虑系统 (8.1.19), 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 和一个对称正定矩阵 U , 如果存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得具有未知变量 X 、 Y 、 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 和 \hat{D} 的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix}
 -rX & -rI & A^T X + C_1^T \hat{B}^T + qX & A^T + C_1^T \hat{D}^T B^T + qI \\
 * & -rY & \hat{A}^T + qI & YA^T + \hat{C}^T B^T + qY \\
 * & * & -rX & -rI \\
 * & * & * & -rY \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & * \\
 * & * & * & *
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 N_1^T + C_1^T \hat{D}^T N_2^T & 0 & 0 \\
 YN_1^T + \hat{C}^T N_2^T & 0 & 0 \\
 0 & XD & XM \\
 0 & D & M \\
 -\varepsilon I & 0 & 0 \\
 * & -rq^{-1}I & 0 \\
 * & * & -\varepsilon^{-1}I
 \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.29)$$

$$\begin{bmatrix}
 -U & C_2 & C_2 Y \\
 * & -X & -I \\
 * & * & -Y
 \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.30)$$

是可行的, 则系统 (8.1.19) 存在形如 (8.1.20) 的输出反馈鲁棒协方差控制器。其中*代表由矩阵的对称性得到的矩阵子块。

证明 对矩阵不等式 (8.1.23) 分别右乘矩阵 $\text{diag}\{\Phi_1, \Phi_1, I, I, I\}$ 和左乘该矩阵的转置, 对矩阵不等式 (8.1.24) 分别右乘矩阵 $\text{diag}\{I, \Phi_1\}$ 和左乘该矩阵的转置, 利用等式 (8.1.26) 和 (8.1.28) 即可以推出 (8.1.23) 和 (8.1.29), 以及 (8.1.24) 和 (8.1.30) 是等价的, 从而由定理 8.1.4 可得本定理的结论。

对于给定的 ε , 矩阵不等式 (8.1.29) 和 (8.1.30) 是一组线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解线性矩阵不等式系统 (8.1.29) ~ (8.1.30)。

对给定的 ε , 如果线性矩阵不等式系统 (8.1.29) ~ (8.1.30) 是可行的, 则从其任意一个可行解可以按以下步骤求得系统 (8.1.19) 的一个输出反馈鲁棒协方差控制器:

1. 根据 (8.1.25) 式, 通过矩阵 $I - XY$ 的奇异值分解, 确定两个可逆矩阵 S 和 T ;
2. 通过 (8.1.27) 式确定控制器参数矩阵 A_c 、 B_c 、 C_c 和 D_c 。

根据定理 8.1.5, 如果线性矩阵不等式系统 (8.1.29) ~ (8.1.30) 是可行的, 则可以用它的可行解构造系统的一组鲁棒协方差控制器。利用鲁棒协方差控制器的这一参数化表示或凸约束刻画, 可以进一步设计满足其他性能要求的鲁棒协方差控制器。特别地, 我们将用它来设计具有最小控制能量的协方差控制器, 即设计一个形如 (9.1.20) 的输出反馈控制器, 使得闭环系统满足性能条件 (i) 和 (ii), 且使得以下的性能指标

$$J(u) = \sup_F \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \{E[u^T(t)Ru(t)]\}^{1/2} \right\} \quad (8.1.31)$$

最小化, 其中 $R = V^T V$ 是一个给定的加权矩阵。

控制器 (8.1.20) 给出了

$$u(t) = [D_c C_1 \quad C_c] \bar{x}(t) = K \bar{x}(t)$$

因此,

$$\begin{aligned} J(u)^2 &= \sup_F \{ \lim_{t \rightarrow \infty} E[\bar{x}^T(t) K^T R K \bar{x}(t)] \} \\ &= \sup_F \{ \text{Trace}[(VK)X(VK)^T] \} \\ &\leq \text{Trace}[(VK)P(VK)^T] \end{aligned}$$

可以通过使得上界 $\text{Trace}[(VK)P(VK)^T]$ 的最小化来求取具有最小能量的鲁棒协方差控制器。为此引进一个矩阵变量 Q , 使得 $(VK)P(VK)^T < Q$, 则 $\text{Trace}(Q)$ 的最小化将保证 $\text{Trace}[(VK)P(VK)^T]$ 的最小化。

另一方面, 根据矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 $(VK)P(VK)^T < Q$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -Q & VKP \\ PK^T V^T & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.32)$$

对以上矩阵不等式分别左乘矩阵 $\text{diag}\{I, \Phi_1^T\}$ 和右乘该矩阵的转置, 并利用关系式 (8.1.26) 和变量变换公式 (8.1.27), 可将矩阵不等式 (8.1.32) 转化成一个具有变量 X, Y, \hat{C}, \hat{D} 和 Q 的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -Q & V\hat{D}C_1 & V\hat{C} \\ C_1^T \hat{D}^T V^T & -X & -I \\ \hat{C}^T V & -I & -Y \end{bmatrix} < 0 \quad (8.1.33)$$

总结以上的分析, 可以得到求取具有最小能量鲁棒协方差控制器的方法。

定理 8.1.6 考虑系统 (8.1.19), 对给定的圆盘 $D(q, r)$ 、一个对称矩阵 U 和性能指标 (8.1.31), 如果以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon, X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, Q} \text{Trace}(Q) \quad (8.1.34)$$

$$\text{s. t. } (8.1.30), (8.1.31), (8.1.33)$$

有一个解, 则利用该解构造的鲁棒协方差控制器是系统 (8.1.19) 的一个具有最小控制能量的鲁棒协方差控制器。

对 ε 的任意给定值, 优化问题 (8.1.34) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以利用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该优化问题。问题 (8.1.34) 的最小值可以通过应用对正标量 ε 的一维搜索来求取。

以下用一个倒立摆系统来说明上面导出的控制器设计方法。

例 8.1.2 倒立摆系统由状态空间模型 (8.1.19) 描述, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10.18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.980 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = I_4$$

$$M = [0 \ 1 \ 0 \ -0.1], N_1 = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0], N_2 = 0$$

要求设计一个输出反馈控制器,使得对所有允许的参数不确定性,闭环系统的所有极点均位于左半复平面上的圆盘 $D(3, 2)$ 中,且稳态状态协方差矩阵不超过上界矩阵 $U=50I_4$ 。同时希望所求的控制器能量尽可能小,其中控制能量指标中的加权矩阵 $R=1$ 。

采用这一小节提出的方法,求解相应的优化问题(8.1.34)。对于给定的 ε ,应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解该问题。进一步,对不同的 ε 值,重复这一过程,可得 ε 和相应的目标函数值之间的关系(如图 8.1 所示)。由此可知当 $\varepsilon = 0.027$,相应的目标函数值达到最小, $\text{Trace}(Q) = 1.2310\text{e}+004$ 。利用问题(8.1.34)的对应于 $\varepsilon = 0.027$ 的最优可行解,可以设计出所需要的输出反馈鲁棒控制器:

$$\dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 0.9743 & 25.6681 & 0.3856 & -0.0434 \\ -2.4517 & -17.0576 & -0.1451 & 0.0237 \\ -6.6982 & -17.1788 & -2.2886 & 0.0294 \\ -0.9982 & -4.2830 & 0.0194 & -3.0329 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 129.6486 & 19.1449 \\ -68.7685 & -15.1632 \\ -59.0621 & -24.4123 \\ -18.0368 & -4.5976 \end{bmatrix} y(t)$$

$$u(t) = [17.0569 \ 91.0880 \ 0.6594 \ -0.1541] x_c(t) + [447.5151 \ 89.9098] y(t)$$

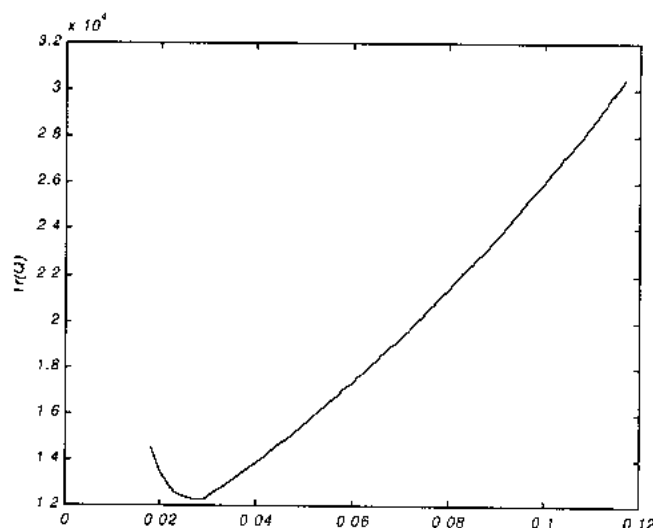


图 8.1 参数 ε 和目标函数值之间的关系

对所有允许的参数不确定性,闭环系统的极点绘制在图 8.2 中。

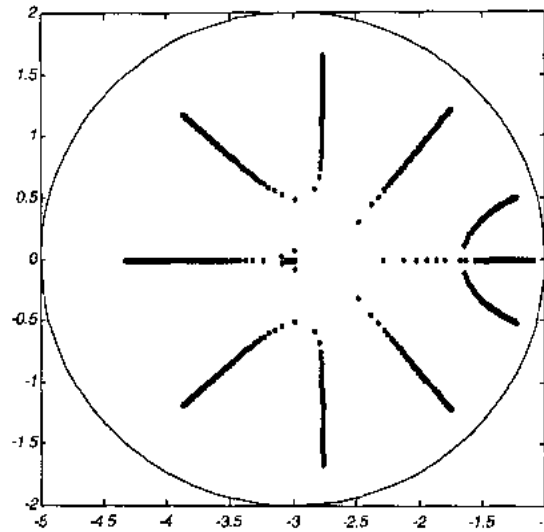


图 8.2 闭环系统的极点分布

8.2 离散系统的鲁棒方差控制

考虑由以下状态方程描述的不确定离散系统:

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k) + Dw(k) \quad (8.2.1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $w(k) \in \mathbf{R}^p$ 是一个具有单位协方差矩阵的零均值白噪声过程, 且和初始状态 $x(0)$ 是不相关的, A 、 B 和 D 是描述名义系统模型的已知常数矩阵, ΔA 和 ΔB 是反映系统模型中参数不确定性的未知实矩阵, 且具有以下形式:

$$[\Delta A \quad \Delta B] = HF[E_1 \quad E_2] \quad (8.2.2)$$

上式中的 $F \in \mathbf{R}^{n \times j}$ 是一个满足

$$F^T F \leq I \quad (8.2.3)$$

的不确定矩阵, H 、 E_1 和 E_2 是已知的常数矩阵, 它们反映了不确定参数出现在系统模型中的结构信息。

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则应用状态反馈控制律

$$u(k) = Kx(k) \quad (8.2.4)$$

后所得到的闭环系统是

$$x(k+1) = (A_c + \Delta A_c)x(k) + Dw(k) \quad (8.2.5)$$

其中: $A_c = A + BK$, $\Delta A_c = HF(E_1 + E_2K)$ 。如果闭环系统 (8.2.5) 是渐近稳定的, 则它的稳态状态协方差矩阵 $X = \lim_{k \rightarrow \infty} \{E[x(k)x^T(k)]\}$ 存在。进一步, 由 w 和初始状态 $x(0)$ 的不相关

性, 可得矩阵 X 满足以下的矩阵方程:

$$(A_c + \Delta A_c)X(A_c + \Delta A_c)^T - X + DD^T = 0 \quad (8.2.6)$$

本节研究的问题是: 对不确定离散系统 (8.2.1), 给定的常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 设计一个控制律 (8.2.4), 使得对所有允许的参数不确定性, 闭环系统 (8.2.5) 满足以下要求:

- (a) 所有闭环极点均位于圆盘 $D(q, r)$ 中, 即 $\sigma(A_c + \Delta A_c) \subset D(q, r)$;
- (b) 闭环系统的稳态状态协方差矩阵 X 满足条件

$$[X]_{ii} < \sigma_i^2, \quad i=1, 2, \dots, n$$

其中 $[X]_{ii}$ 表示矩阵 X 的第 i 个对角线上的元, 即第 i 个状态分量的稳态方差。在这一小节中, $D(q, r)$ 表示复平面上中心在 $q + j0$ 、半径为 r 的圆盘。

满足以上条件的控制律 (8.2.4) 称为是不确定离散系统 (8.2.1) 的一个鲁棒方差控制律。

引理 8.2.1 对闭环系统 (8.2.5) 和给定的圆盘 $D(q, r)$, 如果存在对称正定矩阵 P , 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A_c + \Delta A_c - qI)^T \\ A_c + \Delta A_c - qI & -r^2P + DD^T \end{bmatrix} < 0 \quad (8.2.7)$$

则对所有允许的参数不确定性, $\sigma(A_c + \Delta A_c) \subset D(q, r)$, 系统 (8.2.5) 的稳态状态协方差矩阵 X 存在, 且满足 $X < P$ 。

证明 假定存在对称矩阵 P , 使得矩阵不等式 (8.2.7) 成立, 则

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & (A_c + \Delta A_c - qI)^T \\ A_c + \Delta A_c - qI & -r^2P \end{bmatrix} < 0 \quad (8.2.8)$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (8.2.8) 等价于

$$(A_c + \Delta A_c - qI)P(A_c + \Delta A_c - qI)^T - r^2P < 0$$

由此可推出

$$\left(\frac{A_c + \Delta A_c - qI}{r} \right) P \left(\frac{A_c + \Delta A_c - qI}{r} \right)^T - P < 0$$

由离散时间系统的 Lyapunov 稳定性理论可得:

$$\sigma\left(\frac{A_c + \Delta A_c - qI}{r}\right) \subset D(0, 1)$$

因此, $\sigma(A_c + \Delta A_c) \subset D(q, r)$, 即系统 (8.2.5) 的所有极点位于圆盘 $D(q, r)$ 中。由于圆盘 $D(q, r)$ 在单位圆中, 故系统 (8.2.5) 是渐近稳定的, 从而可得系统 (8.2.5) 的稳态状态协方差矩阵 X 存在, 且满足矩阵方程 (8.2.6)。

以下证明矩阵 X 满足 $X < P$ 。首先考虑 $q \geq 0$, 由于圆盘 $D(q, r)$ 在复平面上的单位圆中, 故 $q + r \leq 1$ 。对 (8.2.6) 式左边的矩阵分别左乘和右乘对称矩阵

$$\begin{bmatrix} -qP & I \\ I & P^{-1}/r \end{bmatrix} \quad (8.2.9)$$

得到

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & T \end{bmatrix} \leq 0$$

其中 $PTP = -2P - 2qP/r + [P(A_c + \Delta A_c)^T + (A_c + \Delta A_c)P]/r \leq 0$ 。从 $q \geq 0, r > 0$, 可得

$$-2q(q+r)P \leq -q[P(A_c + \Delta A_c)^T + (A_c + \Delta A_c)P]$$

故

$$\begin{aligned} & (A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^T - 2q(q+r)P + (q^2 - r^2)P + DD^T \\ & = (A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^T - (q+r)^2P + DD^T \\ & \leq (A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^T - q[P(A_c + \Delta A_c)^T + (A_c + \Delta A_c)P] + (q^2 - r^2)P + DD^T \\ & < 0 \end{aligned}$$

利用 $0 < q+r < 1$ 及 $-2q(q+r) + (q^2 - r^2) = -(q+r)^2$, 从以上矩阵不等式可进一步得到

$$(A_c + \Delta A_c)P(A_c + \Delta A_c)^T - P + DD^T < 0 \quad (8.2.10)$$

当 $q < 0$ 时, $q-r > -1$ 。用对称矩阵

$$\begin{bmatrix} -qP & I \\ I & P^{-1}/r \end{bmatrix}$$

替代矩阵 (8.2.9) 分别左乘和右乘 (8.2.8) 式左边的矩阵, 并类似于 $q \geq 0$ 时的讨论, 也可得矩阵不等式 (8.2.10)。

(8.2.10) 式减去 (8.2.6) 式可得

$$(A_c + \Delta A_c)(P - X)(A_c + \Delta A_c)^T - (P - X) < 0$$

由系统 (8.2.5) 的稳定性和 Lyapunov 稳定性理论, 即可推出 $X < P$ 。定理得证。

矩阵不等式 (8.2.7) 包含参数不确定矩阵, 要检验对所有允许的不确定矩阵, 矩阵不等式 (8.2.7) 成立仍然是一件困难的工作。为克服这一困难, 以下引理将引理 8.2.1 中的条件转化成一个线性矩阵不等式的可行性问题, 从而可以应用 LMI 工具箱中的相关求解器来求解所导出的线性矩阵不等式。

引理 8.2.2 存在对称正定矩阵 P , 使得矩阵不等式 (8.2.7) 对所有允许的不确定矩阵 F 成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 矩阵 P 满足

$$\begin{bmatrix} -P & P(A_c - qI)^T & P(E_1 + E_2K)^T \\ (A_c - qI)P & -r^2P + DD^T + \varepsilon HH^T & 0 \\ (E_1 + E_2K)P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.2.11)$$

证明 对 (8.2.7) 式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

可得矩阵不等式 (8.2.7) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P & P(A_c + \Delta A_c - qI)^T \\ (A_c + \Delta A_c - qI)P & -r^2P + DD^T \end{bmatrix} < 0 \quad (8.2.12)$$

记

$$Y = \begin{bmatrix} -P & P(A_c - qI)^T \\ (A_c - qI)P & -r^2P + DD^T \end{bmatrix}$$

并利用矩阵 ΔA_c 的表达式 $\Delta A_c = HF(E_1 + E_2K)$, 矩阵不等式 (8.2.12) 可写成

$$Y + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} F [(E_1 + E_2K)P \ 0] + [(E_1 + E_2K)P \ 0]^T F^T \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} < 0$$

根据引理 5.4.1, 上式对所有满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix}^T + \varepsilon^{-1} [(E_1 + E_2K)P \ 0]^T [(E_1 + E_2K)P \ 0] < 0$$

利用矩阵的 Schur 补性质, 并代入矩阵 Y 的表达式, 从上式即可得到矩阵不等式 (8.2.11)。定理得证。

以下定理是本节的主要结论, 给出了鲁棒方差控制律的存在条件和设计方法。

定理 8.2.1 给定常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 、对称正定矩阵 P 和矩阵 W , 使得以下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -P & (AP + BW - qP)^T & (E_1P + E_2W)^T \\ AP + BW - qP & -r^2P + DD^T + \varepsilon HH^T & 0 \\ E_1P + E_2W & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (8.2.13)$$

$$[P]_i \leq \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.2.14)$$

成立, 则系统 (8.2.1) 存在满足要求 (a) 和 (b) 的鲁棒方差控制律 (8.2.4)。特别地, $u(k) = WP^{-1}x(k)$ 是系统 (8.2.1) 的一个鲁棒方差控制律。

证明 根据引理 8.2.1 和 8.2.2, 在 (8.2.11) 式中定义 $W = KP$, 即可得控制律 $u(k) = WP^{-1}x(k)$ 使得闭环系统满足设计条件 (a)。进而, 由引理 8.2.1 知闭环系统的稳态状态协方差矩阵 X 存在, 且满足 $X < P$ 。由此及 (8.2.14) 式可得闭环系统满足条件 (b)。因此, $u(k) = WP^{-1}x(k)$ 就是一个所求的鲁棒方差控制律。定理得证。

(8.2.13) ~ (8.2.14) 是一个线性矩阵不等式系统, 因此可以用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来求解该系统, 进而判断系统 (8.2.1) 的鲁棒方差控制律的存在性。定理 8.2.1 用一个线性矩阵不等式系统的可行解给出了一组鲁棒方差控制律的一个参数化表示。这一参数化表示可进一步用来设计具有其他附加要求的鲁棒方差控制律。

以下将利用定理 8.2.1 的结果及其提供的鲁棒方差控制律参数化表示来设计使得控制能量最小化的鲁棒方差控制律, 即设计一个状态反馈控制律 (8.2.4), 使得闭环系统满足

条件 (a) 和 (b), 且使得

$$J(u) = \sup_F \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ E \left[u^T(k) R u(k) \right] \right\}^{1/2} \right\}$$

最小化。其中 R 是一个给定的对称正定加权矩阵。

根据定理 8.2.1, 类似于上一节的处理方法, 可得以下结果:

定理 8.2.2 对给定常数 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 和一个圆盘 $D(q, r)$, 如果优化问题

$$\min_{\varepsilon, N, P, W} \text{Trace}(N) \quad (8.2.15)$$

$$\text{s.t. (i) (8.2.13)}$$

$$\text{(ii) (8.2.14)}$$

$$\text{(iii) } \begin{bmatrix} -N & SY \\ (SY)^T & -P \end{bmatrix} < 0$$

有一个解 $\varepsilon^*, N^*, P^*, W^*$, 则 $u(k) = W^*(P^*)^{-1} x(k)$ 是系统 (8.2.1) 的一个最小能量鲁棒方差控制律。

问题 (8.2.15) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

例 8.2.1 考虑不确定离散系统 (8.2.1), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} -0.50 & 1.00 & 1.00 \\ 1.25 & -0.25 & -1.00 \\ -2.25 & -0.25 & 0.50 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [0.3333 \quad 0.1667 \quad 0.1667]^T, \quad E_1 = [0.1944 \quad 0.0833 \quad 0.1389], \quad E_2 = 0.2$$

希望设计一个状态反馈控制律, 使得对所有允许的不确定性, 闭环系统的所有极点均位于中心在 $0.5 + j0$ 、半径为 $r = 0.5$ 的圆盘 $D(0.5, 0.5)$ 中, 且其稳态状态协方差矩阵 X 满足

$$[X]_{11} \leq 1.25, \quad [X]_{22} \leq 2, \quad [X]_{33} \leq 1.75$$

应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp, 可以得到线性矩阵不等式系统 (8.2.13) ~ (8.2.14) 的一个可行解, 根据定理 8.2.1, 得到一个满足要求的鲁棒方差控制律是

$$\bar{u}(k) = [0.8900 \quad -1.0107 \quad -0.9996] x(k)$$

对所有允许的不确定性, 所需要的控制能量 (具有单位加权矩阵) 的上界是

$$J^2(\bar{u}) \leq 1.8397$$

进一步, 若要求鲁棒方差控制律的控制能量尽可能小, 则根据定理 8.2.2 可以得到具有最小控制能量的鲁棒方差控制律是

$$u^*(k) = [0.7855 \quad -0.9863 \quad -0.9912] x(k)$$

相应所需要的控制能量 (具有单位加权矩阵) 的上界是

$$J^2(u^*) \leq 0.8491$$

图 8.3 给出了控制律 \bar{u} 和 u^* 的曲线。

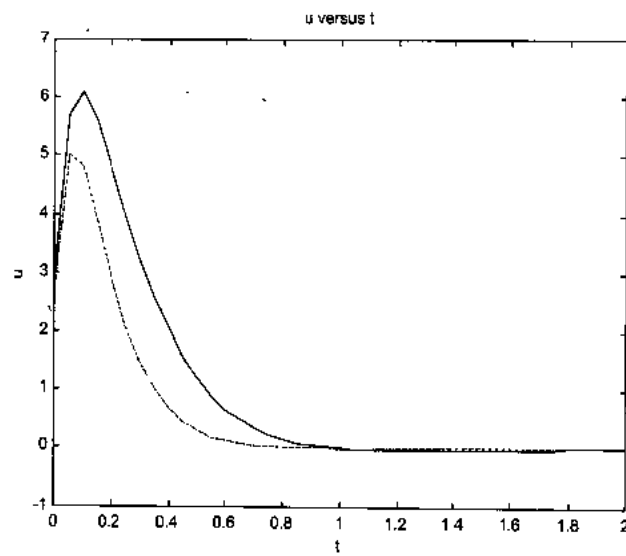


图 8.3 控制曲线（其中 \bar{u} 用实线表示， u^* 用点划线表示）

第9章 时滞系统的分析和综合

在各类工业系统中，时滞现象是极其普遍的，如长管道进料或皮带传输、极缓慢的过程或复杂的在线分析仪等均存在时滞现象。此外，对许多大时间常数的系统，也常用适当的小时间常数加纯滞后环节来近似，这都可以归结为时滞系统（time-delay systems）模型。一般地，一个系统中原料或信息的传输也往往导致时滞现象的产生。因此，通信系统、传送系统、化工过程系统、冶金过程系统、环境系统、电力系统等都是典型的时滞系统。

时滞的存在使得系统的分析和综合变得更加复杂和困难，同时时滞的存在也往往是系统不稳定和系统性能变差的根源。正是由于时滞系统在实际中的大量存在，以及时滞系统分析和控制的困难性，使得时滞系统的分析和综合一直是控制理论和控制工程领域中研究的一个热点问题。本章将基于 Lyapunov 稳定性理论，采用线性矩阵不等式这一有效工具，提出时滞系统鲁棒分析和综合的一些方法与结果。

9.1 时滞系统的稳定性

本节将研究时滞系统的稳定性问题。

考虑时滞系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) \quad (9.1.1)$$

其中： $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量， $A, A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是已知的常数矩阵， $d > 0$ 是滞后时间， $\varphi(t) \in \mathbb{C}^n[-d, 0]$ （ n 维连续函数向量空间）是系统的初始条件。

在现有的时滞系统稳定性条件中，根据是否依赖系统中时滞的大小，可以将稳定性条件分为时滞独立和时滞依赖两类。

- 时滞独立的稳定性条件：即在该条件下，对所有的时滞 $d > 0$ ，系统是渐近稳定的。由于这样的条件无需知道系统滞后时间的信息，因此，适合于处理具有不确定滞后时间和未知滞后时间的时滞系统稳定性分析问题。
- 时滞依赖的稳定性条件：即在该条件下，对滞后时间 d 的某些值，系统是稳定的；而对滞后时间 d 的另外一些值，系统则是不稳定的。因此，系统的稳定性依赖于滞后时间。

一般来说，时滞独立的稳定性条件是比较保守的。因为，若系统满足时滞独立的稳定性条件，则对任意大的滞后时间，系统都是稳定的。显然，这样的要求是很强的，特别是对小时滞系统，这样的条件是很保守的。但是，时滞独立的稳定性条件也有其优点：首

先, 这样的条件往往更为简单; 其次, 它可以允许系统的时滞是不确定或未知的, 从而无须知道系统时滞的精确信息。但时滞独立稳定性条件的保守性也不是绝对的, 本章用一个例子说明了当应用时滞依赖的稳定性条件确定出保持系统稳定的一个滞后上界 d^* , 即条件只保证系统对所有满足 $d \leq d^*$ 的滞后时间 d 是渐近稳定的, 而应用时滞独立的稳定性条件却可以判定系统对任意的滞后时间 d 都是稳定的。因此, 在分析时滞系统的稳定性问题时, 这两类稳定性条件各有优点, 有不可替代的作用。

在检验一个系统的稳定性问题时, 往往是先用时滞独立的稳定性条件来判别, 如果不成功, 再应用时滞依赖的稳定性条件来检验, 并给出使得系统保持稳定的滞后时间 d 的范围。

本节将分别给出一些基于线性矩阵不等式处理方法的时滞独立和时滞依赖的稳定性分析条件。

9.1.1 时滞独立的稳定性条件

这一小节将研究系统 (9.1.1) 的时滞独立稳定性条件。

定理 9.1.1 对系统 (9.1.1), 如果存在对称正定矩阵 $P, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.2)$$

则系统 (9.1.1) 是渐近稳定的。

证明 若存在满足矩阵不等式 (9.1.2) 的对称矩阵 P 和 S , 定义

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(\tau)Sx(\tau)d\tau \quad (9.1.3)$$

其中: $x_t = x(t+\theta)$, $\theta \in [-d, 0]$, 则 $V(x_t)$ 是正定的。沿系统 (9.1.1) 的任意轨线, $V(x_t)$ 关于时间的导数是

$$\begin{aligned} L(x_t, t) &= 2x^T(t)P[Ax(t) + A_d x(t-d)] + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-d)Sx(t-d) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从矩阵不等式 (9.1.2), 可得 $L(x_t, t) < 0$ 。因此 $V(x_t)$ 是系统 (9.1.1) 的一个 Lyapunov 泛函, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 系统 (9.1.1) 是渐近稳定的。定理得证。

容易看到矩阵不等式 (9.1.2) 是关于矩阵变量 P 和 S 的一个线性矩阵不等式。定理 9.1.1 用该线性矩阵不等式系统的可行性给出了系统 (9.1.1) 渐近稳定的一个充分条件, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中求解线性矩阵不等式可行性问题的求解器 `feasp` 来判断系统 (9.1.1) 是否满足该充分条件。

定理的证明过程告诉我们, 从线性矩阵不等式 (9.1.2) 的任意可行解可以构造系统 (9.1.1) 的一个二次型 Lyapunov 泛函 (9.1.3)。定理 9.1.1 给出的条件不依赖于出现在系统中的滞后时间 d 的大小, 因此, 只要线性矩阵不等式 (9.1.2) 是可行的, 则对任意的滞后时间 d , 系统 (9.1.1) 都是渐近稳定的。

如果存在矩阵 A_d 的一个分解

$$A_d = BD, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad D \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (9.1.4)$$

其中 $m = \text{rank}(A_d)$, 显然 $m \leq n$ 。由此分解可以得到:

定理 9.1.2 对系统 (9.1.1), 如果存在对称正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + D^T S D & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.5)$$

则系统 (9.1.1) 是渐近稳定的。

证明 通过构造

$$V(x_t) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-d}^t x^T(\tau) D^T S D x(\tau) d\tau$$

类似于定理 9.1.1 的证明可以证明本定理的结论。

对矩阵 A_d 进行分解的好处在于: 和线性矩阵不等式系统 (9.1.2) 相比, 线性矩阵不等式系统 (9.1.5) 具有更小的维数, 因此有利于降低计算时间和节省存储空间。而在 Lyapunov 泛函中的被积函数只要求是半正定的, 则有利于降低结果的保守性。

9.1.2 时滞依赖的稳定性条件

现在研究时滞系统 (9.1.1) 的时滞依赖的稳定性条件。在采用 Lyapunov 稳定性理论研究系统的稳定性问题时, 首先选定具有待定矩阵变量的一个正定 Lyapunov 函数, 然后通过考虑这个 Lyapunov 函数沿系统任意轨线的时间导数, 并保证这个时间导数最终是负定的来保证所考虑系统的渐近稳定性。系统的稳定性条件就是使得这个时间导数是负定的条件。一般来说, 这个时间导数往往是比较复杂的, 为了导出容易检验的稳定性条件, 通常对这个时间导数进行放大, 通过使得其上界为负定来保证这个时间导数是负定的。在放大的过程中, 常采用以下的一个放大不等式:

$$-2a^T b \leq \eta_1 = \inf_{X>0} \{a^T X a + b^T X^{-1} b\}$$

其中: a 和 b 是给定的向量。特别地, 当 $X = I$ 时, 有 $-2a^T b \leq a^T a + b^T b$ 。容易看到, $-2a^T b$ 的上界 $a^T X a + b^T X^{-1} b$ ($X > 0$) 总是非负的。因此, 当 $-2a^T b < 0$ 时, 采用这样的放大不等式所导出的结论是很保守的。事实上, 在现有的许多鲁棒稳定性分析结论中, 由于采用了对 Lyapunov 时间导数项的不同放大方式, 从而导出了不同的稳定性条件, 也正是由于这些不同的放大方式, 使得相应的结论具有不同的保守性。

以下首先引进 $-2a^T b$ 的一个改进的上界, 然后应用这个上界来导出时滞系统 (9.1.1) 的一个依赖滞后时间的稳定性条件。

对任意适当维数的矩阵 M ,

$$-2(a + Mb)^T b \leq \inf_{X>0} \{(a + Mb)^T X (a + Mb) + b^T X^{-1} b\}$$

故

$$\begin{aligned}
 -2a^T b \leq \eta_2 &= \inf_{X>0, M} \left\{ (a + Mb)^T X(a + Mb) + b^T X^{-1}b + 2b^T Mb \right\} \\
 &= \inf_{X>0, M} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & XM \\ M^T X & (M^T X + I)X^{-1}(XM + I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\} \quad (9.1.6)
 \end{aligned}$$

特别地, 当 $M=0$ 时, 可得 $\eta_2 = \eta_1$ 。因此, 一般地, $\eta_2 \leq \eta_1$ 。

定理 9.1.3 如果存在标量 $\bar{d} > 0$, 对称正定矩阵 P 、 Q 、 V 和矩阵 W , 使得

$$\begin{bmatrix} S & -W^T A_d & A^T A_d^T V & \bar{d}(W + P) \\ -A_d^T W & -Q & A_d^T A_d^T V & 0 \\ V A_d A & V A_d A_d & -V & 0 \\ \bar{d}(W^T + P) & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.7)$$

其中的 $S = (A + A_d)^T P + P(A + A_d) + W^T A_d + A_d^T W + Q$, 则对所有的滞后时间 $d \in [0, \bar{d}]$, 系统 (9.1.1) 是渐近稳定的。

证明 若存在满足矩阵不等式 (9.1.7) 的对称正定矩阵 P 、 Q 、 V 和矩阵 W , 选取以下的 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t)$$

其中:

$$\begin{aligned}
 V_1(x_t) &= x^T(t) P x(t) \\
 V_2(x_t) &= \int_{-d}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\alpha) A_d^T X A_d \dot{x}(\alpha) d\alpha d\beta \\
 V_3(x_t) &= \int_{t-d}^t x^T(\alpha) Q x(\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

由于

$$x(t) - x(t-d) = \int_{t-d}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha$$

则系统方程 (9.1.1) 可以写成

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-d}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha \quad (9.1.8)$$

因此, 如果 $x(t)$ 是系统 (9.1.1) 的轨线, 则 $x(t)$ 也是方程 (9.1.8) 的轨线。沿系统 (9.1.1) 的任意轨线, $V_1(x_t)$ 关于时间的导数是

$$\frac{d}{dt} V_1(x_t) = 2x^T(t) P (A + A_d)x(t) - \int_{t-d}^t 2x^T(t) P A_d \dot{x}(\alpha) d\alpha \quad (9.1.9)$$

定义 $a = A_d \dot{x}(\alpha)$, $b = Px(t)$, 应用矩阵不等式 (9.1.6), 可得

$$\begin{aligned}
 -2x^T(t) P A_d \dot{x}(\alpha) &\leq \dot{x}^T(\alpha) A_d^T X A_d \dot{x}(\alpha) + 2\dot{x}^T(\alpha) A_d^T X M P x(t) \\
 &\quad + x^T(t) P (M^T X + I) X^{-1} (X M + I) P x(t)
 \end{aligned}$$

将上式代入到 (9.1.9) 式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_1(\mathbf{x}_t) &\leq \mathbf{x}^T(t)\{(A+A_d)^T P + P(A+A_d) + dP(M^T X + I)X^{-1}(XM + I)P\}\mathbf{x}(t) \\ &\quad + 2\mathbf{x}^T(t)PM^T X A_d \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) A_d^T X A_d \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

$V_2(\mathbf{x}_t)$ 和 $V_3(\mathbf{x}_t)$ 关于时间的导数分别是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_2(\mathbf{x}_t) &= d\dot{\mathbf{x}}^T(t)A_d^T X A_d \dot{\mathbf{x}}(t) - \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) A_d^T X A_d \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \\ \frac{d}{dt}V_3(\mathbf{x}_t) &= \mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d)Q\mathbf{x}(t-d) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}_t) &= \frac{d}{dt}V_1(\mathbf{x}_t) + \frac{d}{dt}V_2(\mathbf{x}_t) + \frac{d}{dt}V_3(\mathbf{x}_t) \\ &\leq \mathbf{x}^T(t)\{(A+A_d)^T P + P(A+A_d) + \bar{d}^2(W^T + P)V^{-1}(W + P)\}\mathbf{x}(t) \\ &\quad + 2\mathbf{x}^T(t)W^T A_d \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + \dot{\mathbf{x}}^T(t)A_d^T V A_d \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d)Q\mathbf{x}(t-d) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} W &= XMP, \quad V = \bar{d}X \\ X_{11} &= (A+A_d)^T P + P(A+A_d) + \bar{d}^2(W^T + P)V^{-1}(W + P) \\ &\quad + A^T A_d^T V A_d A + Q + W^T A_d + A_d^T W \\ X_{12} &= -W^T A_d + A^T A_d^T V A_d A_d \\ X_{22} &= -Q - A_d^T A_d^T V A_d A_d \end{aligned}$$

由矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 $\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix} < 0$ 等价于不等式 (9.1.7), 由定理

条件可得 $\frac{d}{dt}V(\mathbf{x}_t) < 0$ 。因此, 系统 (9.1.1) 是渐近稳定的。定理得证。

从定理条件可以看出, 要使得定理成立, 必须使 $(A+A_d)^T P + P(A+A_d) < 0$, 这相当于要求时滞系统 (9.1.1) 在 $d=0$ 时是渐近稳定的。显然, 这样的要求是合理的。

对给定的标量 $\bar{d} > 0$, 矩阵不等式 (9.1.7) 是关于矩阵变量 P 、 Q 、 V 和 W 的一个线性矩阵不等式, 因此, 可以用 LMI 工具箱中求解线性矩阵不等式问题的求解器 `feasp` 来检验定理的条件是否成立。另外, 求使得系统保持渐近稳定的最大允许滞后时间 \bar{d}^* 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 具有广义特征值问题的形式。因此, 可以用 LMI 工具箱中的求解器 `gevp` 进行求解。

例 9.1.1 考虑时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1.0 & 0.0 \\ -1.0 & -1.0 \end{bmatrix} x(t-d)$$

容易看到当 $d=0$ 时, 系统的特征值是 -2.0 和 -0.9 , 此时系统是渐近稳定的。当存在滞后状态时, 根据定理 9.1.3, 通过求解相应的线性矩阵不等式问题, 可以得到使得该时滞系统渐近稳定的最大滞后时间 $\bar{d}^* = 4.3588$, 即对所有的 $d \in [0, 4.3588]$, 以上的时滞系统都是渐近稳定的。

9.1.3 Lurie 时滞系统的稳定性分析

这一小节将用线性矩阵不等式给出具有时滞的 Lurie 系统绝对稳定性条件。

考虑由以下状态空间模型描述的时滞系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + Dw(t) \quad (9.1.10)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (9.1.11)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $w(t) \in \mathbf{R}^m$ 是输入信号, $z(t) \in \mathbf{R}^m$ 是输出信号, $d > 0$ 是系统的滞后时间, 系统的反馈关联具有形式

$$w(t) = -\varphi(t, z(t)) \quad (9.1.12)$$

非线性函数 $\varphi(t, z): [0, \infty) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 属于扇形区域 $[V_1, V_2]$, 即

$$[\varphi(t, z) - V_1 z]^T [\varphi(t, z) - V_2 z] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall z \in \mathbf{R}^m \quad (9.1.13)$$

V_1 和 V_2 是已知的实矩阵, 且 $V = V_2 - V_1$ 是一个对称正定矩阵。这样的一类非线性函数可以用图 9.1 表示。(9.1.10) ~ (9.1.12) 实际上是用一个线性系统和一个非线性环节的反馈关联表示了一类非线性系统 (如图 9.2 所示), 其中 G 是线性系统的传递函数矩阵。

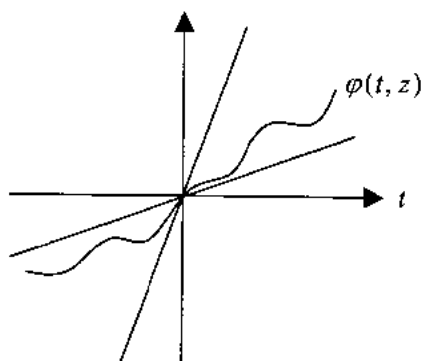
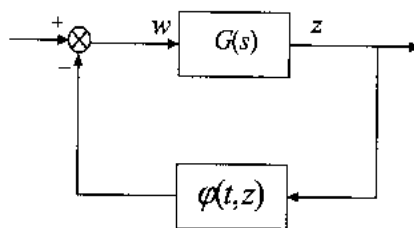
图 9.1 非线性函数 $\varphi(t, z)$ 

图 9.2 非线性系统

定义 9.1.1 如果对所有属于扇形区域 $[V_1, V_2]$ 的非线性函数 $\varphi(t, z)$, 系统 (9.1.10) 是全局渐近稳定的, 则系统 (9.1.10) 称为是在扇形区域 $[V_1, V_2]$ 内绝对稳定的。

这一小节的主要目的是给出系统 (9.1.10) 绝对稳定的时滞依赖条件。为此, 首先给出一个引理。

引理 9.1.1 对任意适当维数的向量 a 、 b 和矩阵 N 、 X 、 Y 、 Z ，其中 X 和 Z 是对称的，若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$ ，则

$$-2a^T N b \leq \inf_{x, Y, Z} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (9.1.14)$$

证明 由定理条件，可得

$$\begin{aligned} -2a^T N b &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &\leq \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T-N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由此即可得到 (9.1.14) 式。引理得证。

若在 (9.1.14) 式中取 $N=Y=I$ ， $Z=X^{-1}$ ，则可得 $-2a^T b \leq \inf_{X>0} \{a^T X a + b^T X^{-1} b\}$ 。当取 $N=I$ ， $Y=I+XM$ ， $Z=(M^T X + I)X^{-1}(XM + I)$ 时，由 (9.1.14) 式可得不等式 (9.1.6)。因此不等式 (9.1.14) 具有更小的保守性。

首先考虑一类特殊情况：非线性函数 $\varphi(t, z)$ 属于扇形区域 $[0, V]$ ，即 φ 满足

$$\varphi^T(t, z)[\varphi(t, z) - Vz] \leq 0 \quad (9.1.15)$$

对这样一类非线性函数，关于系统 (9.1.10) 的绝对稳定性有以下结论：

定理 9.1.4 对系统 (9.1.10)，如果存在对称正定矩阵 P ，对称矩阵 Q 、 X 、 Z 和矩阵 Y ，使得

$$\begin{bmatrix} M & PA_d - Y & PD - C^T V^T & dA^T Z \\ A_d^T P - Y^T & -Q & 0 & dA_d^T Z \\ D^T P - VC & 0 & -2I & dD^T Z \\ dZA & dZA_d & dZD & -dZ \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.16)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.1.17)$$

其中的 $M = PA + A^T P + Y + Y^T + dX + Q$ ，则系统 (9.1.10) 是在扇形区域 $[0, V]$ 内绝对稳定的。

证明 假定存在对称正定矩阵 P ，对称矩阵 Q 、 X 、 Z 和矩阵 Y ，使得矩阵不等式 (9.1.16) 和 (9.1.17) 成立，由于 $x(t) - x(t-d) = \int_{t-d}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha$ ，则系统 (9.1.10) 可被重新写成

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-d}^t \dot{x}(\alpha) d\alpha + Dw(t) \quad (9.1.18)$$

选取一个 Lyapunov 泛函 $V = V_1 + V_2 + V_3$, 其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \\ V_2 &= \int_{-d}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha d\beta \\ V_3 &= \int_{t-d}^t \mathbf{x}^T(\alpha) \mathbf{Q} \mathbf{x}(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

则类似于定理 9.1.3 的处理, 沿系统 (9.1.10) 的任意轨线, V_1 关于时间的导数是

$$\dot{V}_1 = 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(t) - \int_{t-d}^t 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}_d \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{w}(t) \quad (9.1.19)$$

取 $N = \mathbf{P} \mathbf{A}_d$, $\mathbf{a} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{b} = \dot{\mathbf{x}}(\alpha)$, 应用不等式 (9.1.14) 可得:

$$-2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{A}_d \dot{\mathbf{x}}(\alpha) \leq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} - \mathbf{P} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{Y}^T - (\mathbf{P} \mathbf{A}_d)^T & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(\alpha) \end{bmatrix}$$

将以上不等式代入到 (9.1.19) 式, 经整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + d\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T) \mathbf{x}(t) + \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \\ &\quad - 2\mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Y} - \mathbf{P} \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(t-d) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

同理, V_2 和 V_3 关于时间 t 的导数分别是

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= d\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{x}}(t) - \int_{t-d}^t \dot{\mathbf{x}}^T(\alpha) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{x}}(\alpha) d\alpha \\ \dot{V}_3 &= \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-d) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t-d) \end{aligned}$$

因此, 利用 $0 \leq 2\mathbf{w}^T(-\mathbf{w} - \mathbf{V}_Z)$, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + d\mathbf{X} + \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T + \mathbf{Q}) \mathbf{x}(t) - 2\mathbf{x}^T(t) (\mathbf{Y} - \mathbf{P} \mathbf{A}_d) \mathbf{x}(t-d) \\ &\quad + d\dot{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}^T(t-d) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t-d) + 2\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{w}(t) - 2\mathbf{w}^T(t) [\mathbf{w}(t) + \mathbf{V}_Z(t)] \end{aligned}$$

根据方程 (9.1.10), 进一步可得

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}^T \left[\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{P} \mathbf{A}_d - \mathbf{Y} & \mathbf{P} \mathbf{D} - \mathbf{C}^T \mathbf{V}^T \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} - \mathbf{Y}^T & -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^T \mathbf{P} - \mathbf{V} \mathbf{C} & \mathbf{0} & -2\mathbf{I} \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A}_d^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \mathbf{Z} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A}_d & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t-d) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix}$$

其中矩阵 \mathbf{M} 如定理中给出。应用矩阵的 Schur 补性质, 如果矩阵不等式 (9.1.16) 成立, 则可得 $\dot{V} < 0$ 。因此由 Lyapunov 稳定性定理可知, 对所有扇形区域 $[0, \mathbf{V}]$ 中的非线性函数 φ , 系统 (9.1.10) 是全局渐近稳定的。根据定义 9.1.1, 定理得证。

对非线性函数在一般扇形区域 $[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ 中的情形, 通过应用反馈环的变换 (如图 9.3 所示), 可得系统 (9.1.10) 在扇形区域 $[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ 内的绝对稳定性等价于系统

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= (\mathbf{A} - \mathbf{D} \mathbf{V}_1 \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d \mathbf{x}(t-d) + \mathbf{D} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) &= -\varphi(t, \mathbf{z}(t)) \end{aligned} \quad (9.1.20)$$

在扇形区域 $[0, V_2 - V_1]$ 内的绝对稳定性。

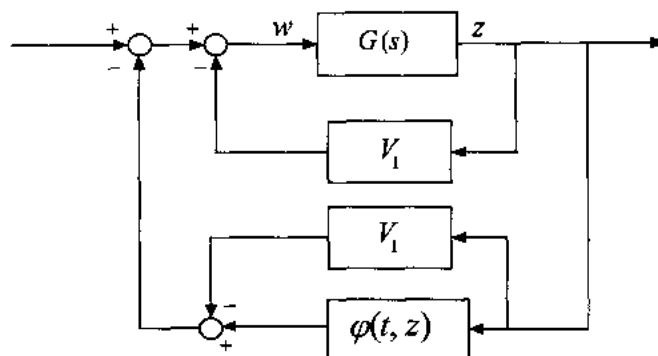


图 9.3 反馈环的变换

因此, 根据定理 9.1.4, 可得:

定理 9.1.5 如果存在对称正定矩阵 P , 对称矩阵 Q 、 X 、 Z 和矩阵 Y , 使得矩阵不等式 (9.1.17) 和

$$\begin{bmatrix} M_1 & PA_d - Y & PD - C^T(V_2 - V_1)^T & d(A - DV_1C)^T Z \\ A_d^T P - Y^T & -Q & 0 & dA_d^T Z \\ D^T P - (V_2 - V_1)C & 0 & -2I & dD^T Z \\ dZ(A - DV_1C) & dZA_d & dZD & -dZ \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.21)$$

成立, 其中的 $M_1 = P(A - DV_1C) + (A - DV_1C)^T P + Y + Y^T + dX + Q$, 则系统 (9.1.10) 是在扇形区域 $[V_1, V_2]$ 内绝对稳定的。

不等式 (9.1.17) 和 (9.1.21) 是关于矩阵变量 P 、 Q 、 X 、 Y 和 Z 的一个线性矩阵不等式系统, 因此, 系统 (9.1.10) 的绝对稳定性问题转化成了一个线性矩阵不等式系统的可行性问题, 而后者可以应用 LMI 工具箱中求解 LMI 的方法和软件有效地求解之, 从而可以有效地判断系统 (9.1.10) 的绝对稳定性。

应用定理 9.1.5 可以求出使得系统 (9.1.10) 保持绝对稳定的最大允许滞后时间 d^* 。 d^* 可以通过求解以下的优化问题得到:

$$\begin{aligned} & \max_{P, Q, X, Y, Z, d} d \\ & \text{s.t. } P > 0 \\ & (9.1.17), (9.1.21) \end{aligned}$$

该问题具有线性矩阵不等式系统中的广义特征值问题形式, 故可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `gevp` 来求得该问题的全局最优解。注意: 该问题需要经过适当的处理, 才能应用求解器 `gevp`, 因为它不满足求解器 `gevp` 的前提条件。事实上, 根据矩阵的 Schur 补性质, 从矩阵不等式 (9.1.21), 上面的优化问题等价于

$$\begin{aligned} & \min \rho \\ & \text{s.t. } (9.1.17) \end{aligned} \quad (9.1.22)$$

$$\begin{bmatrix} A^T \\ A_d^T \\ D^T \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} A & A_d & D \end{bmatrix} < -\rho \begin{bmatrix} M & PA_d - Y & PD - C^T V^T \\ A_d^T P - Y^T & -Q & 0 \\ D^T P - VC & 0 & -2I \end{bmatrix}$$

$$P > 0$$

对问题 (9.1.22), 可以应用求解器 `gevp` 来求解。若该问题有最优值 ρ^* , 则所求的最大允许滞后时间 $d^* = (\rho^*)^{-1}$ 。

例 9.1.2 考虑时滞系统 (9.1.10), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad -0.5]$$

非线性函数所在的扇形区域为 $[0.5, 2]$ 。通过应用 LMI 工具箱中的求解器 `gevp` 可以得到相应的优化问题 (9.1.22) 有解, 根据定理 9.1.5, 保持该系统绝对稳定的最大允许滞后时间是 $d^* = 2.3154$ 。

不等式 (9.1.14) 和 (9.1.6) 相比, 不仅降低了放大过程中的保守性, 而且不等式 (9.1.14) 有利于处理控制器的设计和模型中的不确定性。例如在不等式 (9.1.7) 中存在系统矩阵的乘积项 AA , AA_d , $A_d A_d$ 等, 这些项的存在使得控制器参数将以非线性的形式出现, 但在不等式 (9.1.16) 中就不存在这样的项了。以下利用这一性质进一步给出使得闭环系统具有绝对稳定性的控制器设计方法。

考虑由状态空间模型描述的时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + Dw(t) + Bu(t) \\ z(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (9.1.23)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 是控制输入, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ 是输入信号, $z(t) \in \mathbb{R}^m$ 是输出信号, $d > 0$ 是系统的滞后时间, 被控对象的反馈关联 $w(t) = -\varphi(t, z(t))$, 其中 φ 是属于扇形区域 $[V_1, V_2]$ 的非线性函数。

我们的目的是设计无记忆线性状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 使得闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t-d) + Dw(t) \quad (9.1.24)$$

是绝对稳定的。具有这样性质的控制律称为系统 (9.1.23) 的绝对稳定化控制律。

以下定理给出了系统 (9.1.23) 存在绝对稳定化状态反馈控制律的条件及绝对稳定化状态反馈控制律的设计方法。

定理 9.1.6 对系统 (9.1.23) 和给定的扇形区域 $[V_1, V_2]$, 如果存在对称正定矩阵 \tilde{P} , 对称矩阵 \tilde{Q} , \tilde{X} , \tilde{Z} 和矩阵 \tilde{W} , \tilde{Y} , 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & A_d \tilde{P} - \tilde{Y} & D - \tilde{P} C^T (V_2 - V_1) & d[\tilde{P}(A - DV_1 C)^T + \tilde{W}^T B^T] \\ * & -\tilde{Q} & 0 & d\tilde{P} A_d^T \\ * & * & -2I & dD^T \\ * & * & * & -d\tilde{Z} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T & \tilde{P}\tilde{Z}^{-1}\tilde{P} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.1.26)$$

成立, 其中 $\tilde{M} = (A - DV_1C)\tilde{P} + B\tilde{W} + \tilde{P}(A - DV_1C)^T + \tilde{W}^T B^T + \tilde{Y} + \tilde{Y}^T + d\tilde{X} + \tilde{Q}$, *处是由矩阵的对称性得到的矩阵块, 则 $u(t) = \tilde{W}\tilde{P}^{-1}x(t)$ 是系统 (9.1.23) 的一个绝对稳定化控制律。

证明 根据定理 9.1.5, 如果存在对称正定矩阵 P , 对称矩阵 Q 、 X 、 Z 和矩阵 Y , 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} M_2 & PA_d - Y & PD - C^T(V_2 - V_1)^T & d(A + BK - DV_1C)^T Z \\ A_d^T P - Y^T & -Q & 0 & dA_d^T Z \\ D^T P - (V_2 - V_1)C & 0 & -2I & dD^T Z \\ dZ(A + BK - DV_1C) & dZA_d & dZD & -dZ \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.27)$$

和 (9.1.17) 成立, 其中 $M_2 = P(A + BK - DV_1C) + (A + BK - DV_1C)^T P + Y + Y^T + dX + Q$, 则闭环系统 (9.1.24) 是绝对稳定的。对不等式 (9.1.27) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}, I, Z^{-1}\}$, 对不等式 (9.1.17) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{P^{-1}, P^{-1}\}$, 并记 $\tilde{P} = P^{-1}$, $\tilde{Q} = P^{-1}QP^{-1}$, $\tilde{W} = KP^{-1}$, $\tilde{Y} = P^{-1}YP^{-1}$, $\tilde{Z} = Z^{-1}$, $\tilde{X} = P^{-1}XP^{-1}$, 则可以推出 (9.1.17) 式和 (9.1.27) 式分别等价于 (9.1.26) 式和 (9.1.25) 式。由此得证定理。

容易看到矩阵不等式 (9.1.26) 并不是一个线性矩阵不等式, 但是如果令 $\tilde{P} = \tilde{Z}$, 则可得:

推论 9.1.1 对系统 (9.1.23) 和给定的扇形区域 $[V_1, V_2]$, 如果存在对称矩阵 \tilde{P} 、 \tilde{Q} 、 \tilde{X} 和矩阵 \tilde{W} 、 \tilde{Y} , 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & A_d\tilde{P} - \tilde{Y} & D - \tilde{P}C^T(V_2 - V_1) & d[\tilde{P}(A - DV_1C)^T + \tilde{W}^T B^T] \\ * & -\tilde{Q} & 0 & d\tilde{P}A_d^T \\ * & * & -2I & dD^T \\ * & * & * & -d\tilde{P} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.1.28)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^T & \tilde{P} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.1.29)$$

其中: $\tilde{M} = (A - DV_1C)\tilde{P} + B\tilde{W} + \tilde{P}(A - DV_1C)^T + \tilde{W}^T B^T + \tilde{Y} + \tilde{Y}^T + d\tilde{X} + \tilde{Q}$, *处是由矩阵的对称性得到的矩阵块, 则 $u(t) = \tilde{W}\tilde{P}^{-1}x(t)$ 是系统 (9.1.23) 的一个绝对稳定化控制律。

可以看到 (9.1.28) ~ (9.1.29) 是一个关于矩阵变量 \tilde{P} 、 \tilde{Q} 、 \tilde{X} 、 \tilde{W} 、 \tilde{Y} 的线性矩阵不等式系统, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解线性矩阵不等式系统 (9.1.28) ~ (9.1.29)。如果该线性矩阵不等式系统有解, 则可以用它的任意一个可行解构造出系统 (9.1.23) 的一个绝对稳定化控制律。

推论 9.1.1 中的处理是以结果的保守性换取问题求解计算的方便和有效性。

9.2 时滞系统的鲁棒稳定性分析

由于系统模型中不可避免地存在不确定性和参数摄动,因此,当名义模型(即忽略了不确定性后的模型)稳定时,确定保持不确定系统稳定的允许摄动范围是很重要的。本节将采用线性矩阵不等式处理方法给出确定这些允许摄动范围的方法。

9.2.1 时滞独立的鲁棒稳定性条件

考虑系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \Delta(t)x(t-d) \quad (9.2.1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $d > 0$ 是滞后时间常数, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个已知的稳定常数矩阵, $\Delta(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是出现在滞后状态向量系数矩阵中的时变摄动,并假定其具有以下形式:

$$\Delta(t) = BE(t)D \quad (9.2.2)$$

其中: B 和 D 是已知的具有适当维数的实常数矩阵,它们反映了参数摄动的结构, $E(t) \in \mathbf{R}^{l \times l}$ 是满足

$$E(t)E^T(t) \leq \rho^2 I \quad (9.2.3)$$

的时变摄动矩阵,其中: ρ 是一个待确定的实常数, I 表示适当维数的单位矩阵。

这里关心的是确定一个尽可能大的 ρ ,使得对所有满足(9.2.2)和(9.2.3)的参数摄动矩阵 $E(t)$,摄动系统(9.2.1)保持是稳定的。

参数摄动(9.2.2)包含了结构摄动和无结构摄动两种情况。事实上,对无结构摄动,即只假定 $\Delta(t)$ 是有界的:

$$\|\Delta(t)\| \leq \rho$$

其中: $\|\Delta(t)\| = [\lambda_{\max}(\Delta^T(t)\Delta(t))]^{1/2}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的最大特征值,取 $B = D = I$,则 $\Delta(t)$ 就可以表示成(9.2.2)和(9.2.3)的形式。对结构摄动,即假定 $\Delta(t)$ 具有形式:

$$\Delta(t) = \sum_{i=1}^m k_i(t)E_i$$

其中: $E_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是反映摄动结构的已知常数矩阵, $k_i(t)$ 是时变的摄动参数。通过将 E_i 分解成 $E_i = E_{i1}E_{i2}$, 其中: $E_{i1} \in \mathbf{R}^{n \times r_i}$, $E_{i2} \in \mathbf{R}^{r_i \times n}$, $r_i = \text{rank}(E_i)$ 。定义

$$\begin{aligned} B &= [E_{11} \quad E_{21} \quad \cdots \quad E_{m1}] \\ D &= [E_{12}^T \quad E_{22}^T \quad \cdots \quad E_{m2}^T]^T \\ E(t) &= \text{diag}\{k_1(t)I_{r_1 \times r_1}, k_2(t)I_{r_2 \times r_2}, \cdots, k_m(t)I_{r_m \times r_m}\} \end{aligned}$$

其中的 $I_{r_i \times r_i}$ 表示 r_i 阶单位矩阵,则摄动矩阵可以表示成 $\Delta(t) = BE(t)D$, 这就是(9.2.2)的

形式。所以可以确定一个 ρ , 使得对所有满足 $|k_i(t)| \leq \rho (i=1, 2, \dots, m)$ 的摄动参数 $k_i(t)$, 摄动系统保持是稳定的。因此, 本小节提出的方法既可应用到具有结构摄动的系统, 也可以应用到具有无结构摄动的系统。

以下给出系统 (9.2.1) 二次稳定的概念。

定义 9.2.1 对系统 (9.2.1), 如果存在对称正定矩阵 P 和 T , 使得对满足 (9.2.3) 式的任意摄动, 沿系统 (9.2.1) 的任意轨线, 泛函

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(\tau)Tx(\tau)d\tau \quad (9.2.4)$$

对时间的导数满足

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(t))}{dt} &= x^T(t)[PA + A^TP + T]x(t) \\ &\quad + 2x^T(t)P\Delta(t)x(t-d) - x^T(t-d)Tx(t-d) < 0 \end{aligned} \quad (9.2.5)$$

则系统 (9.2.1) 称为是二次稳定的。

根据时滞系统的 Lyapunov 稳定性理论, 若系统 (9.2.1) 是二次稳定的, 则由 (9.2.4) 定义的 $V(x, t)$ 是系统 (9.2.1) 的一个 Lyapunov 泛函。因此, 该系统是大范围一致渐近稳定的。另一方面, 在目前众多的基于 Lyapunov 稳定性理论的时滞系统稳定性分析方法中, 通常都是通过选取某个特定结构的对称正定矩阵 P 和 T 来构造形如 (9.2.4) 的 Lyapunov 函数。因此, 这里考虑的二次稳定性具有一般性。

在给出这一小节的主要结论之前, 先证明以下的一个引理。

引理 9.2.1 对具有摄动 (9.2.2) 和 (9.2.3) 的系统 (9.2.1), 存在对称正定矩阵 P 和 T , 使得对所有的 $E(t)E^T(t) \leq \rho^2 I$,

$$\begin{bmatrix} PA + A^TP + T & PBE(t)D \\ D^TE^T(t)B^TP & -T \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.6)$$

成立当且仅当存在对称正定矩阵 \tilde{P} 和 \tilde{T} , 使得

$$\tilde{P}A + A^T\tilde{P} + \tilde{T} + \rho^2\tilde{P}BB^T\tilde{P} < 0 \quad (9.2.7a)$$

$$-\tilde{T} + D^TD < 0 \quad (9.2.7b)$$

证明 定义

$$Y = \begin{bmatrix} PA + A^TP + T & 0 \\ 0 & -T \end{bmatrix}$$

则 (9.2.6) 式可重新写成

$$Y + \begin{bmatrix} \rho PB \\ 0 \end{bmatrix} [\rho^{-1}E(t)] \begin{bmatrix} 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D^T \end{bmatrix} [\rho^{-1}E^T(t)] \begin{bmatrix} \rho B^TP & 0 \end{bmatrix} < 0$$

根据引理 5.4.1, 上式对所有满足 $[\rho^{-1}E(t)][\rho^{-1}E(t)]^T \leq I$ 的摄动矩阵 $E(t)$ 成立, 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\varepsilon^2 \rho^2 \begin{bmatrix} PBB^T P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon Y + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^T D \end{bmatrix} < 0$$

即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon PA + \varepsilon A^T P + \varepsilon T + \varepsilon^2 \rho^2 PBB^T P & 0 \\ 0 & -\varepsilon T + D^T D \end{bmatrix} < 0$$

取 $\tilde{P} = \varepsilon P$, $\tilde{T} = \varepsilon T$, 可得上式等价于 (9.2.7) 式。引理得证。

定理 9.2.1 对给定的标量 ρ , 系统 (9.2.1) 二次稳定的充分必要条件是存在对称正定矩阵 P 和 T , 使得

$$\begin{bmatrix} -T & T & 0 \\ T & PA + A^T P & PB \\ 0 & B^T P & -\rho^{-2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.8a)$$

$$-T + D^T D < 0 \quad (9.2.8b)$$

证明 若存在对称正定矩阵 P 和 T , 使得矩阵不等式 (9.2.8) 成立, 选取形如 (9.2.4) 式的 Lyapunov 函数 $V(x(t))$, 则沿系统 (9.2.1) 的任意轨线, $V(x(t))$ 关于时间的导数是

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + T & PBE(t)D \\ D^T E^T(t)B^T P & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}$$

因此, $\dot{V}(x(t)) < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + T & PBE(t)D \\ D^T E^T(t)B^T P & -T \end{bmatrix} < 0$$

根据引理 9.2.1, 上式进一步等价于存在对称正定矩阵 \tilde{P} 和 \tilde{T} , 使得

$$\tilde{P}A + A^T \tilde{P} + \tilde{T} + \rho^2 \tilde{P}BB^T \tilde{P} < 0 \quad (9.2.9)$$

$$-\tilde{T} + D^T D < 0$$

用 U 表示 (9.2.9) 式左边的矩阵, 则 (9.2.9) 式等价于

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.10)$$

定义一个非奇异矩阵

$$V = \begin{bmatrix} \tilde{T}^{1/2} & 0 & 0 \\ -\tilde{T}^{1/2} & I & -\rho \tilde{P}B \\ 0 & 0 & \rho^{-1} I \end{bmatrix}$$

在 (9.2.10) 式的两边分别左乘矩阵 V 和右乘矩阵 V^T , 可得不等式 (9.2.10) 等价于

$$\begin{bmatrix} -\tilde{T} & \tilde{T} & 0 \\ \tilde{T} & \tilde{P}A + A^T \tilde{P} & \tilde{P}B \\ 0 & B^T \tilde{P} & -\rho^{-2}I \end{bmatrix} < 0$$

这就是所要的结论。定理得证。

定理 9.2.1 用一个线性矩阵不等式系统的可行性表示了具有参数不确定性或参数摄动时滞系统二次稳定性的充分必要条件, 前者可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解。根据这个定理, 还可以通过建立和求解以下的优化问题来确定保持系统 (9.2.1) 渐近稳定的最大允许摄动界 ρ :

$$\begin{aligned} & \min_{P, T, \lambda} \lambda & (9.2.11) \\ \text{s.t. } & \begin{bmatrix} -T & T & 0 \\ T & PA + A^T P & PB \\ 0 & B^T P & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \\ & -T + D^T D < 0 \\ & P > 0 \end{aligned}$$

问题 (9.2.11) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 具有广义特征值问题的形式, 从而可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `gevp` 来求解。如果 λ_{\min} 是该问题的最优值, 则所要求的最大允许摄动界 $\rho = 1/\sqrt{\lambda_{\min}}$ 。

在以往的方法中, 为了确定允许摄动界 ρ , 往往要求解一个包含某个参数或参数矩阵的 Lyapunov 方程或 Riccati 方程。在计算之前, 首先要确定这些参数的值。显然, 这样得到的 ρ 依赖于这些参数的选取。但是, 如何选取这些参数, 以使得允许摄动界 ρ 尽可能大, 尚无有效的方法。而这里提供的确定 ρ 的方法无需事先人为选择参数, 因此可以克服现有方法中在计算前要人为确定参数的不足和由此引进的计算结果的保守性。

在鲁棒稳定性分析中, 有作者提出采用坐标变换的方法来降低分析结果的保守性。这样的方法也被推广到时滞系统的鲁棒稳定性分析中。但是, 由于变换矩阵以非线性方式出现在 ρ 的表达式中, 因此难以找到一个最佳的变换, 以使得 ρ 最大化。在此, 我们将证明: 任何的坐标变换不会改进由问题 (9.2.11) 确定的允许摄动界。事实上, 在变换 $x(t) = Mz(t)$ 下, 系统方程 (9.2.1) 被变换成

$$\dot{z}(t) = A^* z(t) + B^* E(t) D^* z(t-d)$$

其中:

$$A^* = M^{-1}AM, \quad B^* = M^{-1}B, \quad D^* = DM$$

因此, 在问题 (9.2.11) 中的约束条件变为

$$\begin{bmatrix} -T & T & 0 \\ T & PM^{-1}AM + M^T A^T (M^{-1})^T P & PM^{-1}B \\ 0 & B^T (M^{-1})^T P & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.12)$$

$$-T + M^1 D^T D M < 0 \quad (9.2.13)$$

显然, 存在对称正定矩阵 P 和 T , 使得矩阵不等式 (9.2.12) 和 (9.2.13) 成立, 当且仅当对称正定矩阵 $P^* = (M^{-1})^T P M^{-1}$, $T^* = (M^{-1})^T T M^{-1}$ 满足

$$\begin{bmatrix} -T^* & T^* & 0 \\ T^* & P^* A + A^T P^* & P^* B \\ 0 & B^T P^* & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.14)$$

$$-T^* + D^T D < 0 \quad (9.2.15)$$

由此可知, 应用变换 $x(t) = Mz(t)$ 不可能改进由凸优化问题 (9.2.11) 所确定的允许摄动界。

例 9.2.1 考虑时滞系统 (9.2.1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

模型中的参数摄动是无结构的。通过求解问题 (9.2.11), 可以得到不确定时滞系统保持渐近稳定的允许摄动界 $\rho = 0.5398$ 。

例 9.2.2 考虑具有滞后摄动的系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1.2 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix} x(t-d), \quad \gamma \neq 0$$

采用这里提出的方法, 取 $D = \begin{bmatrix} 0 & 1.2 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix}$, $B = I$, $E = \gamma I$, 通过求解相应的问题 (9.2.11), 可以得到不确定时滞系统保持渐近稳定的不确定参数允许变化范围是 $|\gamma| \leq 1.3724$ 。

例 9.2.3 考虑系统 (9.2.1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(t) = k_1(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这是一个具有结构摄动的系统。分解矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

取

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) & 0 \\ 0 & k_2(t) \end{bmatrix}$$

通过求解相应的问题 (9.2.11), 可以得到所考虑的不确定时滞系统保持渐近稳定的不确定参数允许变化范围是 $|k_i(t)| < 1/0.5834, i=1, 2$ 。

事实上, 本例中出现的不确定性具有块对角不确定性的形式, 因此可以采用定理 7.1.4 中提出的处理方式, 通过引进更多的自由参数, 得到具有更小保守性的不确定参数允许变化范围。

9.2.2 时滞依赖的鲁棒稳定性条件

考虑由以下状态方程描述的时滞系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t-d(t)) + f(x(t), t) + g(x(t-d(t)), t) \\ x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是给定的常数矩阵, 且 A 是渐近稳定的, 即 A 的所有特征值均具有负实部, $d(t)$ 是一个滞后时间函数, 满足

$$0 \leq d(t) \leq \tau, \quad \dot{d}(t) \leq \mu < 1 \quad (9.2.17)$$

τ 和 μ 是已知常数, $\varphi(t)$ 是已知的连续向量值初始函数, $f, g \in \mathbb{R}^n$ 是满足 $f(0, t) = 0$ 和 $g(0, t) = 0$ 的未知时变非线性函数, 表示模型中的参数摄动或不确定性。

根据以上的模型描述, 当 $f = 0, g = 0, d = 0$ 时, 系统 (9.2.16) 是渐近稳定的。假定

$$\|f(x(t), t)\| \leq \alpha \|x(t)\| \quad (9.2.18)$$

$$\|g(x(t-d(t)), t)\| \leq \beta \|x(t-d(t))\| \quad (9.2.19)$$

则我们关心的是给出 τ, α, β 的值, 使得对所有满足 (9.2.17) ~ (9.2.19) 式的滞后时间 $d(t)$ 和非线性摄动 f, g , 系统 (9.2.6) 保持是渐近稳定的。

定理 9.2.2 对具有非线性摄动 (9.2.18) 和 (9.2.19) 的时滞系统 (9.2.16), 如果存在标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \zeta > 0, \eta > 0$ 和对称正定矩阵 P, Q, Q_1, Q_2 , 使得以下的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} M_0 & L_1 & L_2 \\ L_1^T & -J_1 & 0 \\ L_2^T & 0 & -J_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.20)$$

$$\varepsilon_2 \beta^2 I - (1 - \mu)Q \leq 0 \quad (9.2.21)$$

其中:

$$\begin{aligned}
M_0 &= (A+B)^T P + P(A+B) + \varepsilon_1 \alpha^2 I + Q + \\
&\quad A^T Q_1 A + \zeta \alpha^2 I + \frac{1}{1-\mu} (B^T Q_2 B + \eta \beta^2 I) \\
L_1 &= [\tau P B \quad \tau P B \quad \tau P B \quad \tau P B] \\
L_2 &= [P \quad P] \\
J_1 &= \text{diag}\{Q_1, Q_2, \zeta I, \eta I\} \\
J_2 &= \text{diag}\{\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I\}
\end{aligned}$$

则对满足 $d(t) \leq \tau$ 的滞后时间和满足 (9.2.18) ~ (9.2.19) 的非线性摄动, 系统 (9.2.16) 是鲁棒稳定的。

证明 设 $x(t)$ 是系统 (9.2.16) 的状态轨线, 则对 $t \geq d(t)$, 有

$$\begin{aligned}
x(t-d(t)) &= x(t) - \int_{t-d(t)}^t \dot{x}(s) ds \\
&= x(t) - \int_{t-d(t)}^t [Ax(s) + Bx(s-d(s)) + f(x(s), s) + g(x(s-d(s)), s)] ds
\end{aligned}$$

因此, 状态方程 (9.2.16) 的解也是以下系统状态方程

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= (A+B)x(t) + f(x(t), t) + g(x(t-d(t)), t) \\
&\quad - B \int_{t-d(t)}^t [Ax(s) + Bx(s-d(s)) + f(x(s), s) + g(x(s-d(s)), s)] ds \quad (9.2.22) \\
x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-2\tau, 0]
\end{aligned}$$

的解。其中: $\varphi(t)$ 是一个向量值连续函数, 它是系统 (9.2.16) 的初始值函数到 $[-2\tau, 0]$ 的延拓。系统 (9.2.22) 的渐近稳定性可以保证原来系统 (9.2.16) 的渐近稳定性。以下通过研究系统 (9.2.16) 的渐近稳定性来导出使得系统 (9.2.16) 保持鲁棒渐近稳定的条件。

考虑 Lyapunov 泛函

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) \quad (9.2.23)$$

其中:

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= x^T(t) P x(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds \\
V_2(x) &= \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s) P_1 x(s) ds d\theta + \int_{-\tau}^0 \int_{t-d+\theta}^t x^T(s) P_2 x(s) ds d\theta
\end{aligned}$$

上式中的 P_1 和 P_2 是适当的对称正定矩阵。由于对任意适当维数的向量 a 和 b , 任意正标量 ε , 有 $2a^T b \leq \varepsilon^{-1} a^T a + \varepsilon b^T b$ 。故沿系统 (9.2.22) 的任意轨线,

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(x(t)) &= 2x^T(t) P (A+B)x(t) + 2x^T(t) P [f(x(t), t) + g(x(t-d(t)), t)] \\
&\quad + h(x(t)) + x^T(t) Q x(t) - [1-\dot{d}(t)] x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t)(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1})\mathbf{P}^2\mathbf{x}(t)+\varepsilon_1\mathbf{f}^T(\mathbf{x}(t),t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) \\
&\quad +\varepsilon_2\mathbf{g}^T(\mathbf{x}(t-d(t)),t)\mathbf{g}(\mathbf{x}(t-d(t)),t)+\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) \\
&\quad +\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t)-[1-\mu]\mathbf{x}^T(t-d(t))\mathbf{Q}\mathbf{x}(t-d(t)) \\
&\leq \mathbf{x}^T(t)[(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\varepsilon_1^{-1}\mathbf{P}^2+\varepsilon_2^{-1}\mathbf{P}^2+\varepsilon_1\alpha^2\mathbf{I}+\mathbf{Q}]\mathbf{x}(t) \\
&\quad +\mathbf{h}(\mathbf{x}(t))-\mathbf{x}^T(t-d(t))[(1-\mu)\mathbf{Q}-\varepsilon_2\beta^2\mathbf{I}]\mathbf{x}(t-d(t)) \\
\dot{V}_2(\mathbf{x}(t)) &= \tau\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\mathbf{x}(t)-\int_{-\tau}^0\mathbf{x}^T(t+\theta)\mathbf{P}_1\mathbf{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\quad -[1-d(t)]\int_{-\tau}^0\mathbf{x}^T(t-d+\theta)\mathbf{P}_2\mathbf{x}(t-d+\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\leq \tau\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\mathbf{x}(t)-\int_{-\tau}^0\mathbf{x}^T(t+\theta)\mathbf{P}_1\mathbf{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\quad -(1-\mu)\int_{-\tau}^0\mathbf{x}^T(t-d+\theta)\mathbf{P}_2\mathbf{x}(t-d+\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) &= -2\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}\int_{-d(t)}^0[\mathbf{A}\mathbf{x}(t+s)+\mathbf{B}\mathbf{x}(t+s-d(t+s)) \\
&\quad +\mathbf{f}(\mathbf{x}(t+s),t+s)+\mathbf{g}(\mathbf{x}(t+s-d(t+s)),t+s)]\mathrm{d}s \\
&\leq \tau\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{Q}_1^{-1}+\mathbf{Q}_2^{-1}+\zeta^{-1}\mathbf{I}+\eta^{-1}\mathbf{I})\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t)+\int_{-d(t)}^0[\mathbf{x}^T(t+s)\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{A}\mathbf{x}(t+s) \\
&\quad +\mathbf{x}^T(t+s-d(t+s))\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_2\mathbf{B}\mathbf{x}(t+s-d(t+s))+\zeta\alpha^2\mathbf{x}^T(t+s)\mathbf{x}(t+s) \\
&\quad +\eta\beta^2\mathbf{x}^T(t+s-d(t+s))\mathbf{x}(t+s-d(t+s))]\mathrm{d}s \\
&\leq \tau\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{Q}_1^{-1}+\mathbf{Q}_2^{-1}+\zeta^{-1}\mathbf{I}+\eta^{-1}\mathbf{I})\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \\
&\quad +\int_{-d(t)}^0[\mathbf{x}^T(t+s)(\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{A}+\zeta\alpha^2\mathbf{I})\mathbf{x}(t+s) \\
&\quad +\mathbf{x}^T(t+s-d(t+s))(\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_2\mathbf{B}+\eta\beta^2\mathbf{I})\mathbf{x}(t+s-d(t+s))]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

选取

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_1\mathbf{A}+\zeta\alpha^2\mathbf{I} \\
\mathbf{P}_2 &= \frac{1}{1-\mu}(\mathbf{B}^T\mathbf{Q}_2\mathbf{B}+\eta\beta^2\mathbf{I})
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \dot{V}_1(\mathbf{x}(t))+\dot{V}_2(\mathbf{x}(t)) \\
&\leq \mathbf{x}^T(t)[(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T\mathbf{P}+\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\varepsilon_1^{-1}\mathbf{P}^2+\varepsilon_2^{-1}\mathbf{P}^2+\varepsilon_1\alpha^2\mathbf{I}+\mathbf{Q}]\mathbf{x}(t) \\
&\quad +\mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{B}(\mathbf{Q}_1^{-1}+\mathbf{Q}_2^{-1}+\zeta^{-1}\mathbf{I}+\eta^{-1}\mathbf{I})\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \\
&\quad +\mathbf{x}^T(t-d(t))[\varepsilon_2\beta^2\mathbf{I}-(1-\mu)\mathbf{Q}]\mathbf{x}(t-d(t))+\mathbf{x}^T(t)(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)\mathbf{x}(t) \\
&= \mathbf{x}^T(t)\mathbf{M}_1\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^T(t-d(t))[(1-\mu)\mathbf{Q}-\varepsilon_2\beta^2\mathbf{I}]\mathbf{x}(t-d(t))
\end{aligned}$$

其中:

$$M_1 = (A+B)^T P + P(A+B) + \varepsilon_1 \alpha^2 I + Q + \tau P B (Q_1^{-1} + Q_2^{-1} + \zeta^{-1} I + \eta^{-1} I) B^T P \\ + \tau (A^T Q_1 A + \zeta \alpha^2 I) + \frac{\tau}{1-\mu} (B^T Q_2 B + \eta \beta^2 I) + \varepsilon_1^{-1} P^2 + \varepsilon_2^{-1} P^2$$

由此可以看到: $\dot{V}(x) < 0$ 的一个充分条件是 $M_1 < 0$ 和

$$\varepsilon_2 \beta^2 I - (1-\mu)Q \leq 0$$

通过用 Q_1 、 Q_2 、 ζ 、 η 代替 τQ_1 、 τQ_2 、 $\tau \zeta$ 、 $\tau \eta$ ，并利用矩阵的 Schur 补性质，可得 $M_1 < 0$ 当且仅当矩阵不等式 (9.2.20) 成立。定理得证。

对给定的 τ 、 α 、 β ，矩阵不等式 (9.2.20) 和 (9.2.21) 是一个线性矩阵不等式系统，因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断该线性矩阵不等式系统的可行性问题，进而确定系统的鲁棒稳定性。也可以据此确定使得摄动系统保持渐近稳定的最大允许摄动界 α 和 β 。对给定的摄动范围 α 和 β ，也可以根据定理 9.2.2 求取使得时滞系统保持鲁棒稳定的最大滞后时间 τ 。

如果系统 (9.2.16) 中只存在滞后项的摄动，即 $f(x(t), t) \equiv 0$ ，则从定理 9.2.2 可得以下的推论。

推论 9.2.1 对只存在滞后摄动的时滞系统 (9.2.16)，如果存在标量 $\varepsilon > 0$ 、 $\eta > 0$ 和对称正定矩阵 P 、 Q 、 Q_1 、 Q_2 ，使得以下的矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} N_0 & H_1 & P \\ H_1^T & -K_1 & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.2.24)$$

$$\varepsilon \beta^2 I - (1-\mu)Q \leq 0 \quad (9.2.25)$$

其中：

$$N_0 = (A+B)^T P + P(A+B) + Q + A^T Q_1 A + \frac{1}{1-\mu} (B^T Q_2 B + \eta \beta^2 I)$$

$$H_1 = [\tau P B \quad \tau P B \quad \tau P B]$$

$$K_1 = \text{diag}\{Q_1, Q_2, \eta I\}$$

例 9.2.4 考虑以下时滞系统的鲁棒稳定性问题：

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1.2 & 0.1 \\ -0.1 & -1.0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.6 & 0.7 \\ -1.0 & -0.8 \end{bmatrix} x(t-d(t)) + f(x(t), t) + g(x(t-d(t)), t)$$

首先考虑的摄动是

$$f(x(t), t) = 0, \quad \|g(x(t-d(t)), t)\| \leq 0.1 \|x(t-d(t))\|$$

若 (9.2.17) 式中的 $\mu = 0$ ，即滞后时间是常数。则根据推论 9.2.1，使得该系统保持是鲁棒渐近稳定的一个滞后时间上界是 $d_m < 0.6811$ 。对时变时滞的情况，若 (9.2.17) 式中的 $\mu = 0.5$ ，则可得到 $d_m < 0.5467$ 。

若出现在系统模型中的摄动是

$$\begin{aligned}\|f(x(t), t)\| &\leq 0.1\|x(t)\| \\ \|f(x(t-d(t)), t)\| &\leq 0.1\|x(t-d(t))\|\end{aligned}$$

则当 $\mu=0$ 时, 允许滞后的上界是 $d_m < 0.6129$ 。当 $\mu=0.5$ 时, 允许滞后的上界是 $d_m < 0.4950$ 。

9.3 不确定时滞系统的保性能控制

本节针对具有状态滞后且模型中具有时变参数不确定性的系统, 研究其保性能控制问题。利用 Lyapunov 稳定性理论, 采用线性矩阵不等式处理方法, 提出了状态反馈和输出反馈保性能控制器的存在条件和设计方法。

9.3.1 鲁棒性能分析

考虑由以下状态方程描述的不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = [A + DF(t)E_1]x(t) + [A_d + DF(t)E_d]x(t-d) \quad (9.3.1)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $F(t) \in \mathbf{R}^{l \times j}$ 是满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 的不确定参数矩阵, 它可能是时变的, A 、 D 、 E_1 、 E_d 是已知的适当维数的实常数矩阵, d 表示系统的滞后时间。系统的初始条件是 $(x(0), x(s)) = (x_0, \varphi(s))$, $s \in [-d, 0)$, $\varphi(\cdot)$ 是连续的向量值函数。

为了检验系统 (9.3.1) 的鲁棒稳定性, 考虑以下的 Lyapunov 泛函:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(\tau)Sx(\tau)d\tau \quad (9.3.2)$$

其中 P 和 S 是两个适当的对称正定矩阵。类似于 9.1.1 节中稳定性的分析方法, 沿系统 (9.3.1) 的任意轨线, 可以得到

$$\dot{V}(x(t)) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A + DFE_1)^T P + P(A + DFE_1) + S & P(A_d + DFE_d) \\ (A_d + DFE_d)^T P & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}$$

因此, 如果对所有允许的不确定性, $\dot{V}(x(t)) < 0$, 则根据 Lyapunov 稳定性理论, 系统 (9.3.1) 是鲁棒渐近稳定的。

由这一思想, 推广定义 9.2.1, 可以引进以下的关于不确定时滞系统的二次稳定性概念。

定义 9.3.1 对不确定时滞系统 (9.3.1), 如果存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得对所有允许的不确定性, 以下的矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} (A + DFE_1)^T P + P(A + DFE_1) + S & P(A_d + DFE_d) \\ (A_d + DFE_d)^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.3)$$

则系统 (9.3.1) 称为是二次稳定的。

根据前面的分析, 若不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 则该系统一定是鲁棒渐近稳定的。但反之未必成立。

以下定理给出了不确定时滞系统 (9.3.1) 二次稳定的一个充分必要条件。

定理 9.3.1 不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P 和 S , 标量 $\varepsilon > 0$, 使得矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \varepsilon P D D^T P + \varepsilon^{-1} E_1^T E_1 + S & P A_d + \varepsilon^{-1} E_1^T E_d \\ A_d^T P + \varepsilon^{-1} E_d^T E_1 & -S + \varepsilon^{-1} E_d^T E_d \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.4)$$

成立。

证明 根据定义, 不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得对所有满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 的不确定性矩阵 $F(t)$, 矩阵不等式 (9.3.3) 成立。

记

$$Y = \begin{bmatrix} A^T P + PA + S & P A_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix}$$

则矩阵不等式 (9.3.3) 可以写成

$$Y + \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} E_1 & E_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & E_d \end{bmatrix}^T F^T \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

根据引理 5.4.1, 上式对所有满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 的参数不确定矩阵 $F(t)$ 成立, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PD \\ 0 \end{bmatrix}^T + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} E_1 & E_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_d \end{bmatrix}^T < 0$$

经整理, 即可得到 (9.3.4) 式。定理得证。

矩阵不等式 (9.3.4) 关于变量 ε 、 P 、 S 并不是线性的。但如果对不等式 (9.3.4) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}\}$, 并记 $\bar{P} = \varepsilon P$, $\bar{S} = \varepsilon S$, 则不等式 (9.3.4) 等价于

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P} + \bar{P} A + \bar{P} D D^T \bar{P} + E_1^T E_1 + \bar{S} & \bar{P} A_d + E_1^T E_d \\ A_d^T \bar{P} + E_d^T E_1 & -\bar{S} + E_d^T E_d \end{bmatrix} < 0$$

进一步利用矩阵的 Schur 补性质, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} A^T \bar{P} + \bar{P} A + \bar{S} & \bar{P} A_d & \bar{P} D & E_1^T \\ A_d^T \bar{P} & -\bar{S} & 0 & E_d^T \\ D^T \bar{P} & 0 & -I & 0 \\ E_1 & E_d & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.5)$$

因此, 不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 当且仅当存在对称正定矩阵 \bar{P} 和 \bar{S} , 使得矩阵不等式 (9.3.5) 成立。

不等式 (9.3.5) 是两个矩阵变量 \bar{P} 和 \bar{S} 的一个线性矩阵不等式, 故可以采用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来判断线性矩阵不等式 (9.3.5) 是否是可行的, 据此可得系统 (9.3.1) 是否是二次稳定的结论。

二次稳定性条件 (9.3.5) 不依赖系统的滞后时间 d , 因此, 这个二次稳定性条件是滞后独立的。

例 9.3.1 考虑以下的不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d) \quad (9.3.6)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_d(t)$ 是不确定矩阵, 分别满足

$$\|\Delta A(t)\| \leq 0.2, \|\Delta A_d(t)\| \leq 0.2$$

应用 9.2 节提出的时滞依赖稳定性条件, 可以得到使得系统 (9.3.6) 保持是鲁棒稳定的最大允许滞后时间 $d^* = 0.3977$ 。定义

$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, E_1 = E_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则系统 (9.3.6) 可以写成 (9.3.1) 的形式。通过应用求解器 `feasp`, 求解线性矩阵不等式 (9.3.5), 得到它的一个可行解是

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 4.4354 & -0.1694 \\ -0.1694 & 2.3781 \end{bmatrix}, \bar{S} = \begin{bmatrix} 8.4861 & -1.5835 \\ -1.5835 & 4.1770 \end{bmatrix}$$

因此, 根据定理 9.3.1, 对任意的滞后时间 d , 不确定时滞系统 (9.3.6) 都是二次稳定的。

这个例子说明了: 在有些情况下, 时滞依赖的稳定性条件可能比时滞独立的稳定性条件具有更大的保守性。

除了分析系统的鲁棒稳定性, 我们还需要分析系统的一些鲁棒性能。在此, 考虑用一个二次型性能指标

$$J = \int_0^\infty x^T(t) Q x(t) dt \quad (9.3.7)$$

来描述系统的性能, 其中 $Q > 0$ 是给定的加权矩阵。

下面讨论在什么条件下, 对所有允许的不确定性, 系统性能指标 (9.3.7) 是有界的, 并在有界的情况下, 给出该性能指标尽可能小的上界。

定理 9.3.2 对系统 (9.3.1) 和性能指标 (9.3.7), 如果存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得对所有满足 $F^T F \leq I$ 的不确定性矩阵 F ,

$$\begin{bmatrix} (A + DFE_1)^T P + P(A + DFE_1) + S + Q & P(A_d + DFE_d) \\ (A_d + DFE_d)^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.8)$$

则不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 且对所有允许的不确定参数矩阵, 性能指标 (9.3.7) 满足

$$J \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau) \mathbf{S} \varphi(\tau) d\tau \quad (9.3.9)$$

证明 从矩阵不等式 (9.3.8) 可以推出

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_1)^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_1) + \mathbf{S} & \mathbf{P}(\mathbf{A}_d + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_d) \\ (\mathbf{A}_d + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_d)^T \mathbf{P} & -\mathbf{S} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

故不等式 (9.3.3) 成立, 根据定义 9.3.1, 不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的。

采用二次型 Lyapunov 泛函 (9.3.2), 类似于系统稳定性分析的讨论, 并利用不等式 (9.3.8), 可以得到

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < -\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t)$$

或等价地,

$$\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) < -\dot{V}(\mathbf{x}(t))$$

在上式两边从 $t=0$ 到 $t=\infty$ 积分, 并利用系统的二次稳定性, 可得

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) dt \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + \int_{-d}^0 \varphi^T(t) \mathbf{S} \varphi(t) dt$$

定理得证。

进一步, 可以将定理 9.3.2 的条件转化成一个容易检验线性矩阵不等式的可行性问题。

定理 9.3.3 对给定的系统 (9.3.1) 和性能指标 (9.3.7), 如果存在标量 $\varepsilon > 0$, 对称正定矩阵 \mathbf{X} 和 \mathbf{S} , 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{X} + \varepsilon \mathbf{D}\mathbf{D}^T + \mathbf{X}\mathbf{S}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X} & \mathbf{A}_d & \mathbf{X}\mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{A}_d^T & -\mathbf{S} & \mathbf{E}_d^T \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{X} & \mathbf{E}_d & -\varepsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (9.3.10)$$

则不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 且对所有允许的不确定性, 性能指标满足

$$J \leq \mathbf{x}_0^T \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau) \mathbf{S} \varphi(\tau) d\tau \quad (9.3.11)$$

证明 类似于定理 9.3.1 的证明, 矩阵不等式 (9.3.8) 对所有允许的不确定性成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_1 + \mathbf{S} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_d + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_1^T \mathbf{E}_d \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_d^T \mathbf{E}_1 & -\mathbf{S} + \varepsilon^{-1} \mathbf{E}_d^T \mathbf{E}_d \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

应用矩阵的 Schur 补性质, 上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}^T \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Q} & \mathbf{P}\mathbf{A}_d & \mathbf{E}_1^T \\ \mathbf{A}_d^T \mathbf{P} & -\mathbf{S} & \mathbf{E}_d^T \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_d & -\varepsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

对上式分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$, 并记 $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$, 可得上式等价于不等式

(9.3.10)。根据定理 9.3.2, 即可得到本定理的结论。定理得证。

定理 9.3.3 中的条件 (9.3.10) 还不是一个线性矩阵不等式。利用矩阵的 Schur 补性质, 可以将该条件转化成一个等价的线性矩阵不等式可行性问题。

推论 9.3.1 对给定的系统 (9.3.1) 和性能指标 (9.3.7), 如果存在标量 $\varepsilon > 0$, 对称正定矩阵 X 和 V , 使得

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + \varepsilon DD^T & A_d V & XE_1^T & X & X \\ VA_d^T & -V & VE_d^T & 0 & 0 \\ E_1 X & E_d V & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -V & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.12)$$

则不确定时滞系统 (9.3.1) 是二次稳定的, 且对所有允许的不确定性, 性能指标满足

$$J \leq x_0^T X^{-1} x_0 + \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau) V^{-1} \varphi(\tau) d\tau \quad (9.3.13)$$

证明 由矩阵的 Schur 补性质, 可得矩阵不等式 (9.3.10) 等价于

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + \varepsilon DD^T & A_d & XE_1^T & X & X \\ A_d^T & -S & E_d^T & 0 & 0 \\ E_1 X & E_d & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -S^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, S^{-1}, I, I, I\}$, 并记 $V = S^{-1}$, 可得上式等价于矩阵不等式 (9.3.12)。根据定理 9.3.3, 得证本推论。

(9.3.13) 式给出的系统性能上界依赖于线性矩阵不等式 (9.3.12) 的可行解, 线性矩阵不等式 (9.3.12) 的不同可行解导出不同的系统性能上界。显然, 最小性能上界是刻画系统鲁棒性能的一个有意义的指标。以下通过建立和求解一个优化问题可以得到这样一个系统的最小性能上界:

$$\min_{\varepsilon, \alpha, X, V, M} \bar{J} = \alpha + \text{Trace}(M) \quad (9.3.14)$$

s.t. (i) (9.3.12)

$$(ii) \begin{bmatrix} -\alpha & x_0^T \\ x_0 & -X \end{bmatrix} < 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -M & N^T \\ N & -V \end{bmatrix} < 0$$

其中: $\int_{-d}^0 \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau = NN^T$ 。事实上, 由

$$\begin{aligned}
 \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau) V^{-1} \varphi(\tau) d\tau &= \int_{-d}^0 \text{Trace}(\varphi^T(\tau) V^{-1} \varphi(\tau)) d\tau \\
 &= \text{Trace}(N V^{-1} N^T) \\
 &= \text{Trace}(N^T V^{-1} N)
 \end{aligned}$$

及问题 (9.3.14) 中的约束条件 (ii) 等价于 $x_0^T X^{-1} x_0 < \alpha$, 约束条件 (iii) 等价于 $N^T V^{-1} N < M$, 因此, 可以通过使得 $\alpha + \text{Trace}(M)$ 的最小化来保证由 (9.3.13) 式给出的性能指标上界的最小化。而问题 (9.3.14) 是一个凸优化问题, 因此它的全局最优解给出了使得性能上界 (9.3.13) 最小化的最小系统性能上界。

优化问题 (9.3.14) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

9.3.2 状态反馈保性能控制器设计

考虑由以下状态方程描述的不确定时滞系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= [A + DF(t)E_1]x(t) + [A_d + DF(t)E_d]x(t-d) + [B + DF(t)E_2]u(t) \\
 x(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-d, 0]
 \end{aligned} \quad (9.3.15)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入向量, A 、 A_d 、 B 、 D 、 E_1 、 E_2 和 E_d 是已知的具有适当维数的实常数矩阵, $d > 0$ 是滞后时间常数, $\varphi(t)$ 是给定的初始向量值连续函数, $F(t) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 是出现在系统模型中的不确定参数矩阵, 假定其是范数有界的, 即满足 $F^T(t)F(t) \leq I$ 。

定义系统的性能指标

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (9.3.16)$$

其中: Q 和 R 是给定的对称正定加权矩阵。

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则考虑的问题是设计一个无记忆状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t) \quad (9.3.17)$$

使得对所有允许的不确定性, 闭环系统

$$\dot{x}(t) = [A + BK + DF(t)(E_1 + E_2K)]x(t) + [A_d + DF(t)E_d]x(t-d) \quad (9.3.18)$$

是渐近稳定的, 闭环性能指标

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)(Q + K^T RK)x(t)]dt \quad (9.3.19)$$

是有界的, 且给出它的一个上界。具有这样性质的控制律 (9.3.17) 称为是系统 (9.3.15) 的一个状态反馈保性能控制律。

根据定理 9.3.2, 可以直接得到系统 (9.3.15) 的保性能控制律存在条件。

定理 9.3.4 对系统 (9.3.15) 和性能指标 (9.3.16), 若存在适当维数的矩阵 K , 对称正定矩阵 P 和 S , 使得对所有允许的不确定性,

$$\begin{bmatrix} Z & P(A_d + DFE_d) \\ (A_d + DFE_d)^T P & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.20)$$

其中的 $Z = Q + K^T R K + S + P[A + BK + DF(E_1 + E_2 K)] + [A + BK + DF(E_1 + E_2 K)]^T P$, 则控制律 $u(t) = Kx(t)$ 是系统 (9.3.15) 的一个状态反馈保性能控制律, 且对所有允许的不确定参数矩阵, 闭环性能指标 (9.3.19) 满足

$$J = \int_0^\infty x^T(t)(Q + K^T R K)x(t)dt \leq \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau)S\varphi(\tau)d\tau \quad (9.3.21)$$

定理 9.3.4 的证明采用了二次型 Lyapunov 泛函 (9.3.2), 导出的是闭环系统的二次稳定性, 由此可以提出以下的定义:

定义 9.3.2 对系统 (9.3.15) 和性能指标 (9.3.16), 控制律 $u(t) = Kx(t)$ 称为是一个状态反馈二次保性能控制律, 如果存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得矩阵不等式 (9.3.20) 对所有允许的不确定性成立。

显然, 这样的二次保性能控制律既保证了闭环系统的二次稳定性, 同时也保证了闭环系统具有一定的鲁棒性能。它是不确定时滞系统二次镇定概念的推广, 也是不确定系统二次保性能控制概念到不确定时滞系统的推广。

以下定理给出了不确定时滞系统二次保性能状态反馈控制律的设计方法。

定理 9.3.5 具有性能指标 (9.3.16) 的不确定时滞系统 (9.3.15) 存在一个二次保性能控制律 $u(t) = Kx(t)$, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$ 、矩阵 W 和对称正定矩阵 X 、 V , 使得以下的线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} H & A_d V & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T & X \\ VA_d^T & -V & VE_d^T & 0 & 0 & 0 \\ E_1 X + E_2 W & E_d V & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.22)$$

其中的 $H = AX + BW + (AX + BW)^T + \varepsilon DD^T$ 。进而, 如果矩阵不等式 (9.3.22) 有一个可行解 $\hat{\varepsilon}, \hat{W}, \hat{X}, \hat{V}$, 则无记忆状态反馈控制律

$$u^*(t) = \hat{W}\hat{X}^{-1}x(t) \quad (9.3.23)$$

是系统 (9.3.15) 的一个二次保性能控制律, 且

$$J^* = \varphi^T(0)\hat{X}^{-1}\varphi(0) + \int_{-d}^0 \varphi^T(\tau)\hat{V}^{-1}\varphi(\tau)d\tau \quad (9.3.24)$$

是相应的闭环性能指标的上界。

证明 根据定义 9.3.2 和定理 9.3.3, 控制律 $u(t) = Kx(t)$ 是系统 (9.3.15) 的一个二次保性能控制律, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$ 、对称正定矩阵 X 和 S , 使得

$$\begin{bmatrix} \Sigma & A_d & X(E_1 + E_2 K)^T \\ A_d^T & -S & E_d^T \\ (E_1 + E_2 K)X & E_d & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0$$

其中 $\Sigma = X(A + BK)^T + (A + BK)X + \varepsilon DD^T + XSX + X(Q + K^T RK)X$ 。应用矩阵的 Schur 补性质, 并记 $W = KX$, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} AX + BW + (AX + BW)^T + \varepsilon DD^T & A_d & (E_1 X + E_2 W)^T & X & W^T & X \\ A_d^T & -S & E_d^T & 0 & 0 & 0 \\ E_1 X + E_2 W & E_d & -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

对上式分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, S^{-1}, I, I, I, I\}$, 并记 $V = S^{-1}$, 可得上式等价于 (9.3.22)。其余部分可以从前面的分析得到。定理得证。

不等式 (9.3.22) 是关于变量 ε, W, X, V 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解这个线性矩阵不等式的可行性问题, 并在其可行时得到它的一个可行解。利用该线性矩阵不等式的可行解, 按照 (9.3.23) 式构造出所求的二次保性能控制律, 相应的闭环系统性能上界由 (9.3.24) 给出。

以下定理给出了不确定时滞系统最优保性能控制律的设计方法。

定理 9.3.6 对系统 (9.3.13) 和性能指标 (9.3.14), 如果以下的优化问题

$$\min_{\varepsilon, \alpha, W, X, V, M} \alpha + \text{Trace}(M) \quad (9.3.25)$$

s.t. (i) (9.3.22)

$$(ii) \begin{bmatrix} -\alpha & \varphi^T(0) \\ \varphi(0) & -X \end{bmatrix} < 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -M & N^T \\ N & -V \end{bmatrix} < 0$$

有一个解 $\hat{\varepsilon}, \hat{\alpha}, \hat{W}, \hat{X}, \hat{V}, \hat{M}$, 则控制律 $u^*(t) = \hat{W}\hat{X}^{-1}x(t)$ 是一个使得性能指标上界 (9.3.24) 最小化的最优保性能控制律。其中: $\int_{-d}^0 \varphi(\tau)\varphi^T(\tau)d\tau = NN^T$ 。

证明 类似于优化问题 (9.3.14), 即可得证本定理的结论。

问题 (9.3.25) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求解该优化问题。

例 9.3.2 考虑以下的不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = (A + rA_0)x(t) + (A_1 + sA_{11})x(t-1) + (B + qB_1)u(t) \quad (9.3.26)$$

和性能指标 (9.3.16), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

r 、 s 和 q 是系统模型中的不确定参数, 满足 $|r| \leq 0.1$, $|s| \leq 0.1$, $|q| \leq 0.1$, 性能指标 (9.3.16) 中的加权矩阵选成 $Q = I_2$, $R = 1$, 系统的初始条件是 $x_1(t) = e^{t+1}$, $x_2(t) = 0$, $t \in [-1, 0]$ 。定义

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = 10 \times \text{diag}\{r, s, q\}$$

则系统 (9.3.26) 可以重新写成

$$\dot{x}(t) = (A + DFE_1)x(t) + (A_1 + DFE_d)x(t-d) - (B + DFE_2)u(t)$$

通过应用定理 9.3.6 所提出的方法, 求解相应的优化问题 (9.3.25), 得到最优二次性能无记忆状态反馈控制律

$$u^*(t) = -[1.0046 \quad 3.3408]x(t)$$

相应的系统性能上界 $J^* = 45.4437$ 。图 9.4 给出了闭环系统的状态曲线。

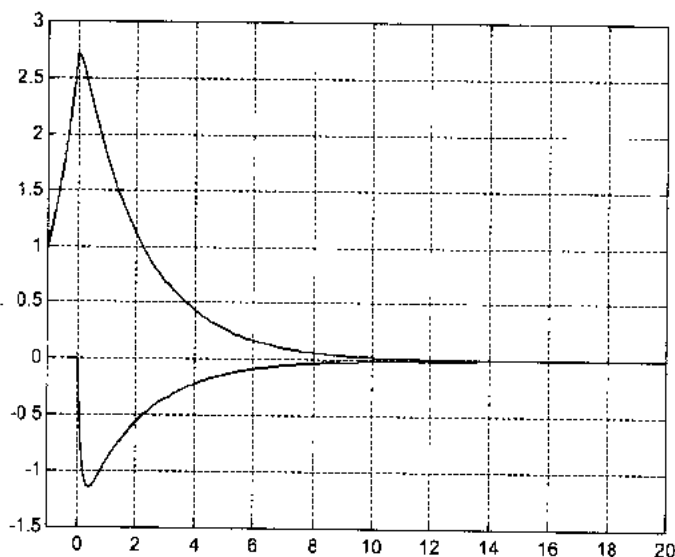


图 9.4 闭环系统的状态曲线

9.3.3 输出反馈保性能控制器设计

考虑以下的不确定时滞系统:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= [\mathbf{A} + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_1] \mathbf{x}(t) + [\mathbf{A}_d + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_d] \mathbf{x}(t-d) + [\mathbf{B} + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_2] \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_1 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_1] \mathbf{x}(t) + [\mathbf{C}_d + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_d] \mathbf{x}(t-d) + \mathbf{D}_2 \mathbf{F}(t) \mathbf{E}_2 \mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (9.3.27)$$

其中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ 是测量输出, \mathbf{A} 、 \mathbf{A}_d 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C}_1 、 \mathbf{C}_d 、 \mathbf{D}_1 、 \mathbf{D}_2 、 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{E}_d 是已知的具有适当维数的实常数矩阵, $d > 0$ 是滞后时间常数, $\mathbf{F}(t) \in \mathbf{R}^{l \times j}$ 是出现在系统模型中的不确定参数矩阵, 假定其是范数有界的, 即满足 $\mathbf{F}^T(t) \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$, 对 $-d \leq s \leq 0$, $(\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(s)) = (\mathbf{x}_0, \varphi(s))$ 是系统的初始条件, $\varphi(s)$ 是给定的初始向量值连续函数。

系统的性能指标定义成

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt \quad (9.3.28)$$

其中: \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是给定的对称正定加权矩阵。

考虑以下满阶的动态输出反馈控制器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \mathbf{A}_c \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}\quad (9.3.29)$$

其中的 $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是控制器的状态, 则应用该控制器后所导出的闭环系统是

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}(t) \bar{\mathbf{E}}_1) \bar{\mathbf{x}}(t) + (\bar{\mathbf{A}}_d + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}(t) \bar{\mathbf{E}}_d) \bar{\mathbf{x}}(t-d) \quad (9.3.30)$$

其中:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{E}}_1 = [\mathbf{E}_1 \quad \mathbf{E}_2 \mathbf{C}_c], \quad \bar{\mathbf{E}}_d = \mathbf{E}_d\end{aligned}$$

相应的闭环性能指标是

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{C}_c^T \mathbf{R} \mathbf{C}_c \hat{\mathbf{x}}(t)] dt \\ &= \int_0^\infty \bar{\mathbf{x}}^T(t) \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}(t) dt\end{aligned}$$

其中:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{C}_c \end{bmatrix}$$

根据定理 9.3.2, 可得:

定理 9.3.7 对不确定时滞系统 (9.3.27) 和性能指标 (9.3.28), 如果存在控制器 (9.3.29), 对称正定矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$ 和 $\mathbf{P}_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 使得对所有满足 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I}$ 的不确定矩阵 \mathbf{F} , 以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F} \bar{\mathbf{E}}_1)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F} \bar{\mathbf{E}}_1) + \dot{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{C}}^T \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{P} (\bar{\mathbf{A}}_d + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F} \bar{\mathbf{E}}_d) \\ (\bar{\mathbf{A}}_d + \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F} \bar{\mathbf{E}}_d)^T \mathbf{P} & -\mathbf{P}_1 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (9.3.31)$$

其中的 $\hat{P} = \text{diag}\{P_1, 0\}$, 则闭环系统 (9.3.30) 是二次稳定的, 且对所有允许的不确定性, 闭环性能指标满足

$$J \leq \text{Trace}(P\bar{x}_0\bar{x}_0^T) + \text{Trace}\left(P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds\right)$$

使得闭环系统具有这样性质的控制器 (9.3.29) 称为是系统 (9.3.27) 和性能指标 (9.3.28) 的一个输出反馈二次保性能控制器。

当系统模型 (9.3.27) 不存在滞后和不确定性时, 以上的输出反馈保性能控制问题就是典型的 LQG 控制问题。类似于 LQG 控制问题中对依赖初始状态的性能指标的处理, 引进一个适当的矩阵

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & B_c V_2 B_c^T \end{bmatrix}$$

使得

$$J \leq \text{Trace}(PV) + \text{Trace}\left(P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds\right) \quad (9.3.32)$$

特别地, 如果 $V_1 = x_0 x_0^T$, $\hat{x}_0 = 0$, 则 $\bar{x}_0 \bar{x}_0^T \leq V$ 。

类似于定理 9.3.1 的讨论, 矩阵不等式对所有允许的不确定性成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} + \varepsilon P\bar{D}\bar{D}^T P + \varepsilon^{-1} \bar{E}_1^T \bar{E}_1 + \bar{C}^T \bar{C} + \hat{P} & P\bar{A}_d + \varepsilon^{-1} \bar{E}_1^T \bar{E}_d \\ \bar{A}_d^T P + \varepsilon^{-1} \bar{E}_d^T \bar{E}_1 & -\hat{P} + \varepsilon^{-1} \bar{E}_d^T \bar{E}_d \end{bmatrix} < 0$$

应用矩阵的 Schur 补性质, 上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\bar{A}_d & \tilde{E} & P\bar{D} & \bar{E}_1^T & \bar{C}^T \\ * & -P_1 & 0 & 0 & \bar{E}_d^T & 0 \\ * & * & -P_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon^{-1} I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.33)$$

其中: 矩阵中的*表示由矩阵的对称性得到的矩阵块, $\tilde{E} = [I \ 0]^T$ 。上式关于未知变量 ε 、 P 、 P_1 、 A_c 、 B_c 、 C_c 并不是线性的, 因此它不是一个线性矩阵不等式。以下应用第 5 章中的处理方法, 对任意固定的对称正定矩阵 P_1 和正标量 ε , 设法将 (9.3.33) 转化成一个线性矩阵不等式。

首先将矩阵 P 和它的逆矩阵 P^{-1} 作如下分块:

$$P = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & W \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & U \end{bmatrix}$$

其中 $R, S, M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。由等式 $PP^{-1} = I$ 可以推出

$$MN^T = I - RS \quad (9.3.34)$$

定义矩阵

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (9.3.35)$$

则

$$P\Phi_1 = \Phi_2, \quad \Phi_1^T P\Phi_1 = \Phi_1^T \Phi_2 = \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix}$$

定义一组新的变量:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= NA_c M^T + NB_c C_1 R + SBC_c M^T + SAR \\ \hat{B} &= NB_c \\ \hat{C} &= C_c M^T \end{aligned} \quad (9.3.36)$$

根据以上定义的关系式, 对任意给定的对称正定矩阵 R 、 S 和可逆矩阵 M 、 N , 由矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} 可惟一确定控制器系数矩阵 A_c 、 B_c 、 C_c 。利用变量替换公式 (9.3.36), 矩阵不等式 (9.3.33) 等价于

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.37)$$

其中:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \begin{bmatrix} AR + RA^T + \hat{C}^T B^T + B\hat{C} & A + \hat{A}^T & A_d & R \\ A^T + \hat{A} & A^T S + SA + \hat{B}C_1 + C_1^T \hat{B}^T & SA_d + \hat{B}C_2 & I \\ A_d^T & A_d^T S + C_2^T \hat{B} & -P_1 & 0 \\ R & I & 0 & -P_1^{-1} \end{bmatrix} \\ J_{12} &= \begin{bmatrix} D_1 & RE_1^T + \hat{C}^T E_2^T & RQ^{1/2} & \hat{C}R^{1/2} \\ SD_1 + \hat{B}D_2 & E_1^T & Q^{1/2} & 0 \\ 0 & E_d^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_{22} &= \text{diag}\{-\varepsilon^{-1}I, -\varepsilon I, -I\} \end{aligned}$$

总结以上的分析, 可以得到不确定时滞系统输出反馈保性能控制问题解的主要结论:

定理 9.3.8 不确定时滞系统 (9.3.27) 和性能指标 (9.3.28) 存在一个输出反馈二次保性能控制器 (9.3.29), 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 对称正定矩阵 R 、 S 、 P_1 , 矩阵 \hat{A} 、 \hat{B} 、 \hat{C} , 使得矩阵不等式 (9.3.37) 和

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0 \quad (9.3.38)$$

成立。进一步, 若矩阵不等式 (9.3.37) 和 (9.3.38) 存在可行解, 则相应的控制器系数矩阵和对称正定矩阵 P 可以按以下步骤构造得到:

1. 通过矩阵 $I - RS$ 的奇异值分解, 得到满足 (9.3.34) 的可逆矩阵 M 和 N , 按 (9.3.35) 定义矩阵 Φ_1 和 Φ_2 , 由 $P = \Phi_2 \Phi_1^{-1}$ 得到对称正定矩阵 P ;

2. 从 (9.3.36) 式计算控制器系数矩阵 A_c 、 B_c 和 C_c 。

在定理 9.3.8 给出的控制器构造中, 矩阵 $I - RS$ 的奇异值分解一般是不惟一的, 因此, 每一种不同的分解就会导出具有不同状态空间实现的保性能控制器 (9.3.29) 和不同的对称正定矩阵 P 。但可以证明, 由定理 9.3.8 得到的保性能控制器所对应的性能指标上界并不依赖于这种奇异值的分解方式, 或者说矩阵 M 和 N 的不同选取。事实上,

$$\begin{aligned} J &\leq \text{Trace}(PV) + \text{Trace}\left(P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds\right) \\ &= \text{Trace}(\Phi_2 \Phi_1^{-1} V) + \text{Trace}\left(P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds\right) \end{aligned}$$

可以看到: 矩阵 $I - RS$ 的不同奇异值分解方式只影响到性能指标上界表达式中的第一部分。对这一部分, 利用矩阵的一些求逆公式, 可得

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\Phi_2 \Phi_1^{-1} V) &= \text{Trace}(\Phi_1^{-1} V \Phi_2) \\ &= \text{Trace}(V_1 S) + \text{Trace}(V_2 \hat{B}^T R(I - SR)^{-1} \hat{B}) \end{aligned}$$

显然, 上式并不依赖于矩阵 M 和 N 的选取。

对给定的矩阵 P_1 和标量 ε , 不等式 (9.3.37) 是一个线性矩阵不等式。因此, 根据定理 9.3.8, 系统 (9.3.27) 存在形如 (9.3.29) 的一个动态输出反馈二次保性能控制器, 当且仅当存在对称正定矩阵 P_1 和标量 $\varepsilon > 0$, 使得线性矩阵不等式系统 (9.3.37) ~ (9.3.38) 是可行的。由矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (9.3.37) 等价于

$$J_{11} + J_{12} J_{22}^{-1} J_{12}^T < 0$$

条件 $J_{11} < 0$ 是忽略了不确定性后的时滞系统 (9.3.27) 输出反馈二次镇定的一个充分必要条件, 而附加项 $J_{12} J_{22}^{-1} J_{12}^T$ 则是为了补偿系统不确定性的影响和保性能的要求。

为了设计使得由 (9.3.32) 给出的闭环系统性能上界最小化的保性能控制器, 注意到

$$\text{Trace}(PV) = \text{Trace}\left(\begin{bmatrix} V_1^{1/2} & 0 \\ 0 & V_2^{1/2} B_c^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & 0 \\ 0 & V_2^{1/2} B_c^T \end{bmatrix}\right) = \text{Trace}(\tilde{B}^T P \tilde{B})$$

其中:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & 0 \\ 0 & V_2^{1/2} B_c^T \end{bmatrix}$$

而

$$\text{Trace}(\tilde{B}^T P \tilde{B}) + \text{Trace}\left(P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds\right) < \gamma$$

等价于

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - Z \begin{bmatrix} \hat{B}^T P \\ -P \end{bmatrix} < 0 \\ \text{Trace}(Z) < \gamma \end{cases}$$

其中 Z 是一个辅助的对称矩阵变量。对上式中的第一个不等式分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, \Phi_1\}$ ，并利用矩阵变量替换公式 (9.3.36)，可得以上不等式组进一步等价于

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P_1 \int_{-d}^0 x(s)x^T(s)ds & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - Z \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & V_1^{1/2} S \\ 0 & V_2^{1/2} \hat{B}^1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & 0 \\ S V_1^{1/2} & \hat{B} V_2^{1/2} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \\ \text{Trace}(Z) < \gamma \end{cases} < 0 \quad (9.3.39)$$

建立以下优化问题

$$\min \text{Trace}(Z) \quad (9.3.40)$$

s.t. (9.3.37)

(9.3.39)

$$P_1 > 0, \varepsilon > 0$$

对任意固定的对称正定矩阵 P_1 和标量 $\varepsilon > 0$ ，问题 (9.3.40) 是一个凸优化问题，因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来进行求解。而全局最小值则可以通过对使得线性矩阵不等式 (9.3.37) 和 (9.3.39) 可行的所有可能对称正定矩阵 P_1 和标量 $\varepsilon > 0$ 的搜索来寻找。这样一个求解过程一般是相当复杂的。以下给出两种处理方法来求解这个问题的次优解。

方法 1：限定矩阵 P_1 的结构，即 $P_1 = \delta I, \delta > 0$ 。这一限制条件缩小了矩阵 P_1 的选取范围，由此得到的只能是性能指标上界的一个次优值。然而这一限制条件的引进使得优化问题 (9.3.40) 可以通过对参数 ε 和 δ 的两维搜索得到所导出问题的全局最优解。

方法 2：注意到矩阵 P_1 和它的逆矩阵同时出现在不等式 (9.3.37) 中，标量 ε 和它的逆也都出现在不等式 (9.3.37) 中。因此不等式 (9.3.37) 的可行性问题可以列成某个矩阵秩的最小化问题。为此，引进两个新的变量 X 和 δ ，则矩阵不等式 (9.3.37) 可以重写成

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} < 0$$

其中：

$$\hat{J}_{11} = \begin{bmatrix} AR + RA^T + \hat{C}^T B^T + B\hat{C} & A + \hat{A}^T & A_d & R \\ A^T + \hat{A} & A^T S + SA + \hat{B}C_1 + C_1^T \hat{B}^T & SA_d + \hat{B}C_2 & I \\ A_d^T & A_d^T S + C_2^T \hat{B} & -P_1 & 0 \\ R & I & 0 & -X \end{bmatrix}$$

$$\hat{J}_{22} = \text{diag}\{-\delta I, -\varepsilon I, -I\}$$

因此, 矩阵不等式 (9.3.37) 的可行性等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad P_1 X = I, \quad \varepsilon \delta = 1 \quad (9.3.41)$$

希望设计一个输出反馈保性能控制器, 使得闭环系统性能上界不超过某个给定的值 γ , 相当于求解以下的矩阵不等式系统

$$\begin{cases} (9.3.37) \\ (9.3.39) \\ \text{Trace}(Z) < \gamma \end{cases}$$

的可行性问题。可以证明: 这样一个线性矩阵不等式系统的可行性问题可以通过求解以下的优化问题来求解:

$$\min \text{Trace}(P_1 X) + \varepsilon \delta \quad (9.3.42)$$

s.t. (9.3.39)

$$\text{Trace}(Z) < \gamma$$

$$\begin{bmatrix} \hat{J}_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & \hat{J}_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & P_1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \geq 0$$

可以证明系统 (9.3.27) 存在一个形如 (9.3.29) 的输出反馈保性能控制器, 使得闭环系统的性能指标上界 (9.3.32) 不超过某个给定的值 γ , 当且仅当问题 (9.3.42) 的全局最小值是 $n+1$ 。

Haddad 等 (1997) 提出了求解问题 (9.3.42) 的一种方法。

例 9.3.3 考虑不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1+0.33f(t) & 0.42f(t) \\ 0.53f(t) & -2+0.67f(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.32 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x(t-d) + \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.75 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [-1 \ 0] x(t)$$

其中 $d=1$, 对 $t \in [-1, 0]$, $x_1(t) = \frac{1}{25}(3e^{t+1}-1)$, $x_2(t) = 0$, $V_1 = 0.1I_2$, $V_2 = 1$, $f(t)$ 是不确

定参数, 满足 $|f(t)| \leq 1$ 。对这个系统, 有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.32 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.75 \end{bmatrix}, C_1 = [-1 \quad 0]$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0.47 \\ 0.75 \end{bmatrix}, E_1 = [0.71 \quad 0.89], C_2 = 0, E_2 = 0, E_d = 0$$

系统的性能指标定义成 (9.3.28), 其中 $Q = 0.5I_2$, $R = 1$ 。问题是设计系统的输出反馈保性能控制器。

通过求解优化问题 (9.3.40), 并根据定理 9.3.8 来设计系统的最优保性能输出反馈控制器。首先将矩阵 P_1 限制成 δI 的形式, 在这种情况下, 通过对所有使得矩阵不等式 (9.3.37) 和 (9.3.39) 可行的 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, 应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解优化问题 (9.3.40), 将得到的最优值和 ε 、 δ 的关系绘制在图 9.5 中。

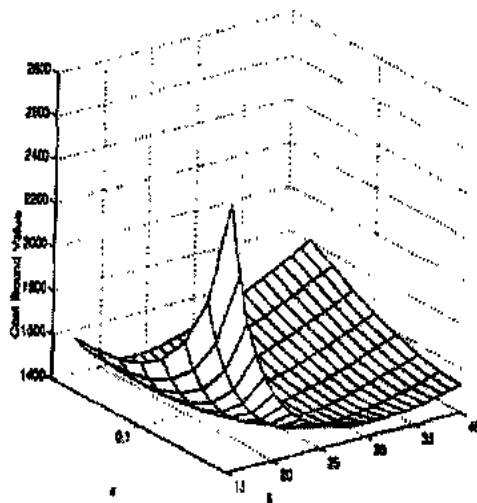


图 9.5 闭环系统的性能指标

经搜索可得: 当 $\varepsilon = 0.09$, $\delta = 25$ 时, 目标函数取得最小值, 相应的系统性能上界是 1.4123×10^3 , 输出反馈保性能控制器的参数矩阵是

$$A_c = \begin{bmatrix} -13.2757 & 10.3702 \\ -1.5436 & -0.1173 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 164.9156 \\ 33.0320 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [0.7236 \quad -0.4518]$$

9.3.4 不确定离散时滞系统的保性能控制

考虑以下同时具有状态和控制滞后的不确定离散时滞系统:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + (\mathbf{A}_1 + \Delta\mathbf{A}_1)\mathbf{x}(k-d) \\ & + (\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B})\mathbf{u}(k) + (\mathbf{B}_1 + \Delta\mathbf{B}_1)\mathbf{u}(k-h) \end{aligned} \quad (9.3.43)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, \mathbf{A} 、 \mathbf{A}_1 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}_1 是已知的适当维数实常数矩阵, $\Delta\mathbf{A}$ 、 $\Delta\mathbf{A}_1$ 、 $\Delta\mathbf{B}$ 和 $\Delta\mathbf{B}_1$ 是不确定矩阵, 它们可以是时变的, 表示了系统模型中的参数不确定性, d 和 h 是未知的正整数, 分别表示系统状态和控制中的滞后时间。在实际应用中, 我们总可以假定 $0 \leq d \leq d^*$, $0 \leq h \leq h^*$, 其中 d^* 和 h^* 是已知的。

系统模型中的参数不确定性假定是范数有界的, 并具有以下的形式:

$$[\Delta\mathbf{A} \quad \Delta\mathbf{B} \quad \Delta\mathbf{A}_1 \quad \Delta\mathbf{B}_1] = \mathbf{D}\mathbf{F}[\mathbf{E}_a \quad \mathbf{E}_b \quad \mathbf{E}_d \quad \mathbf{E}_h] \quad (9.3.44)$$

其中 $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{l \times l}$ 是满足

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I} \quad (9.3.45)$$

的不确定矩阵, \mathbf{D} 、 \mathbf{E}_a 、 \mathbf{E}_b 、 \mathbf{E}_d 、 \mathbf{E}_h 是反映不确定结构的常数矩阵。

系统的性能指标定义成

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) \mathbf{Q} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{u}(k)] \quad (9.3.46)$$

其中: \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是给定的对称正定加权矩阵。

假定系统的状态是可以直接测量得到的, 则研究的问题是对系统 (9.3.43) 和性能指标 (9.3.44), 设计一个无记忆状态反馈控制律

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K} \mathbf{x}(k) \quad (9.3.47)$$

其中: $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是待定的定常反馈增益矩阵, 使得对所有允许的不确定性, 闭环系统

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & [\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{D}\mathbf{F}(\mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b\mathbf{K})]\mathbf{x}(k) + [\mathbf{A}_1 + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_d]\mathbf{x}(k-d) \\ & + [\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{E}_h]\mathbf{K}\mathbf{x}(k-h) \end{aligned} \quad (9.3.48)$$

是渐近稳定的, 且相应的闭环性能指标值满足 $J \leq J^*$, 其中 J^* 是某个确定的常数。我们称具有这样性质的控制律 (9.3.47) 是不确定离散时滞系统 (9.3.43) 和性能指标 (9.3.46) 的一个保性能控制律。

和连续时间的时滞系统不同, 离散时间时滞系统是一个有限维系统。对一个只具有状态滞后的离散时滞系统, 可以通过状态的增维, 将这样一个时滞系统转化为一个无时滞项的离散时间系统, 从而可以应用离散时间系统的分析和设计方法来进行控制系统的分析和设计。但这样的处理方法存在两方面的不足: 一方面是由于状态维数的增加, 特别是当滞后时间比较大时, 使得转化后得到的离散系统具有较高的维数, 给计算带来了一定的困难。另一方面, 如果按转化后得到的离散系统来设计状态反馈控制律, 则得到的控制律不仅依赖当前的状态, 而且还依赖以前的状态, 从而为控制器的实施带来了一定的困难, 也使得控制系统的成本增加。因此, 有必要针对离散时滞系统, 研究符合自身特点和要求的分析与控制器设计方法。

以下定理给出了不确定离散时滞系统 (9.3.43) 存在保性能控制律的一个充分条件。

定理 9.3.9 对系统 (9.3.43) 和性能指标 (9.3.46), 如果存在矩阵 \mathbf{K} , 对称正定矩阵 \mathbf{P} 、 \mathbf{S} 和 \mathbf{T} , 使得对所有允许的不确定性, 矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Pi & A_C^T P A_D & A_C^T P B_H \\ A_D^T P A_C & A_D^T P A_D - S & A_D^T P B_H \\ B_H^T P A_C & B_H^T P A_D & B_H^T P B_H - T \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.49)$$

成立, 其中:

$$\begin{aligned} \Pi &= A_C^T P A_C - P + S + K^T T K + Q + K^T R K \\ A_C &= A + B K + D F (E_a + E_b K) \\ A_D &= A_1 + D F E_d \\ B_H &= B_1 + D F E_h \end{aligned}$$

则 $u(k) = Kx(k)$ 是系统的一个保性能控制律。

证明 若存在对称正定矩阵 P 、 S 、 T 和矩阵 K , 使得对所有允许的不确定性, 矩阵不等式 (9.3.49) 成立。在系统 (9.3.43) 中, 取控制律 $u(k) = Kx(k)$, 则导出的闭环系统是 (9.3.48)。选取一个 Lyapunov 函数

$$V(k) = x^T(k) P x(k) + \sum_{i=1}^d x^T(k-i) S x(k-i) + \sum_{j=1}^h x^T(k-j) K^T T K x(k-j) \quad (9.3.50)$$

则 $V(k)$ 是正定的, 沿闭环系统 (9.3.48) 的任意轨线, $V(k)$ 的前向差分是

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d x^T(k+1-i) S x(k+1-i) - \sum_{i=1}^d x^T(k-i) S x(k-i) \\ &\quad + \sum_{j=1}^h x^T(k+1-j) K^T T K x(k+1-j) - \sum_{j=1}^h x^T(k-j) K^T T K x(k-j) \\ &= [A_C x(k) + A_D x(k-d) + B_H K x(k-h)]^T P [A_C x(k) \\ &\quad + A_D x(k-d) + B_H K x(k-h)] - x^T(k) P x(k) + x^T(k) S x(k) \\ &\quad - x^T(k-d) S x(k-d) + x^T(k) K^T T K x(k) - x^T(k-h) K^T T K x(k-h) \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ Kx(k-h) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Pi + Q + K^T R K & A_C^T P A_D & A_C^T P B_H \\ A_D^T P A_C & A_D^T P A_D - S & A_D^T P B_H \\ B_H^T P A_C & B_H^T P A_D & B_H^T P B_H - T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ Kx(k-h) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从条件 (9.3.49), 可得对所有允许的不确定性,

$$\Delta V(k) < -x^T(k) (Q + K^T R K) x(k) \leq -\lambda_{\min}(Q + K^T R K) \|x(k)\|^2 \quad (9.3.51)$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的最小特征值。由 Lyapunov 稳定性理论, 闭环系统 (9.3.48) 是渐近稳定的。进而, 从不等式 (9.3.51) 得到

$$-\Delta V(k) > x^T(k) (Q + K^T R K) x(k)$$

上式两边从 k 从 0 到 ∞ 求和, 并利用系统的稳定性, 可得

$$J \leq \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^d \mathbf{x}^T(-i)S\mathbf{x}(-i) + \sum_{i=1}^h \mathbf{x}^T(-i)K^T TK\mathbf{x}(-i) \quad (9.3.52)$$

这就说明了 $\mathbf{u}(k) = K\mathbf{x}(k)$ 是系统的一个保性能控制律。定理得证。

注意到由式 (9.3.52) 给出的闭环性能上界依赖于系统的初始条件。为了避免这种对初始条件的依赖, 我们假定系统的初始状态是未知的, 但均在集合 $S = \{\mathbf{x}(-i) \in \mathbf{R}^n : \mathbf{x}(-i) = U\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \leq 1, i = 0, 1, 2, \dots, d\}$, 其中 U 是一个已知常数矩阵。在这个假定下, 由 (9.3.52), 可得

$$\begin{aligned} J &\leq \lambda_{\max}(U^T P U) + d\lambda_{\max}(U^T S U) + h\lambda_{\max}(U^T K^T T K U) \\ &\leq \lambda_{\max}(U^T P U) + d^* \lambda_{\max}(U^T S U) + h^* \lambda_{\max}(U^T K^T T K U) \end{aligned} \quad (9.3.53)$$

以下定理用一个线性矩阵不等式的可行性给出不确定离散系统 (9.3.43) 的保性能控制律存在条件, 并用线性矩阵不等式的可行解给出了保性能控制律的构造方法。

定理 9.3.10 对系统 (9.3.43) 和性能指标 (9.3.46), 如果存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 矩阵 $W \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 对称正定矩阵 $X, M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $N \in \mathbf{R}^{m \times m}$, 使得

$$\begin{bmatrix} -X + \varepsilon D D^T & A X + B W & A_1 M & B_1 N \\ (A X + B W)^T & -X & 0 & 0 \\ M A_1^T & 0 & -M & 0 \\ N B_1^T & 0 & 0 & -N \\ 0 & E_a X + E_b W & E_d M & E_h N \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (E_a X + E_b W)^T & X & W^T & X & W^T \\ M E_d^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N E_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.54)$$

进而, 如果矩阵不等式 (9.3.54) 有一个可行解 ε, W, X, M, N , 则

$$\mathbf{u}(k) = W X^{-1} \mathbf{x}(k) \quad (9.3.55)$$

是系统的一个状态反馈保性能控制律, 相应的闭环性能指标满足

$$J \leq (1 + h^*) \lambda_{\max}(U^T X^{-1} U) + d^* \lambda_{\max}(U^T M^{-1} U) \quad (9.3.56)$$

证明 矩阵不等式 (9.3.49) 可以写成

$$\begin{bmatrix} A_C^T \\ A_D^T \\ B_H^T \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} A_C & A_D & B_H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P + S + K^T T K + Q + K^T R K & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -T \end{bmatrix} < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 上式等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A_C & A_D & B_H \\ A_C^T & -P + S + K^T T K + Q + K^T R K & 0 & 0 \\ A_D^T & 0 & -S & 0 \\ B_H^T & 0 & 0 & -T \end{bmatrix} < 0$$

通过在以上矩阵不等式中代入矩阵 A_C 、 A_D 和 B_H 的表达式, 该矩阵不等式可进一步等价地写成

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A+BK & A_1 & B_1 \\ (A+BK)^T & -P+S+K^T T K+Q+K^T R K & 0 & 0 \\ A_1^T & 0 & -S & 0 \\ B_1^T & 0 & 0 & -T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} 0 & E_a + E_b K & E_d & E_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & E_a + E_b K & E_d & E_h \end{bmatrix}^T F^T \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (9.3.57)$$

根据引理 5.4.1, 并应用矩阵的 Schur 补性质, 上式对所有允许的不确定性成立, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} + \varepsilon D D^T & A+BK & A_1 & B_1 & 0 \\ (A+BK)^T & -P+S+K^T T K+Q+K^T R K & 0 & 0 & (E_a + E_b K)^T \\ A_1^T & 0 & -S & 0 & E_d^T \\ B_1^T & 0 & 0 & -T & E_h^T \\ 0 & E_a + E_b K & E_d & E_h & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.3.58)$$

对以上不等式分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

并记 $X = P^{-1}$, $W = K P^{-1}$, $M = S^{-1}$, $N = T^{-1}$, 再一次应用矩阵的 Schur 补性质, 即可得到矩阵不等式 (9.3.54)。根据定理 9.3.9, 系统存在保性能控制律。

如果矩阵不等式 (9.3.54) 有一个可行解 ε, W, X, M, N , 则从以上证明和定理 9.3.9, $u(k) = WX^{-1}x(k)$ 是系统的一个保性能控制律, 且相应的闭环性能上界是

$$J \leq \lambda_{\max}(U^T X^{-1} U) + d^* \lambda_{\max}(U^T M^{-1} U) + h^* \lambda_{\max}(U^T X^{-1} W^T N^{-1} W X^{-1} U) \quad (9.3.59)$$

注意, 从不等式 (9.3.54) 左边矩阵的负定性可以推出

$$\begin{bmatrix} -X & W^T \\ W & -N \end{bmatrix} < 0$$

而这个不等式进一步等价于 $W^T N^{-1} W < X$ 。通过在不等式 (9.3.59) 的右边最后一项中应用 $W^T N^{-1} W < X$, 即可得到闭环性能指标满足 (9.3.56)。定理得证。

不等式 (9.3.54) 是关于变量 ε, W, X, M, N 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来判断该线性矩阵不等式的可行性问题。如果这个线性矩阵不等式是可行的, 该求解器还能提供一个可行解。根据定理 9.3.10, 可以用这个可行解构造系统的一个保性能控制律, 并得到相应的闭环系统性能上界。

定理 9.3.10 给出的保性能控制律的线性矩阵不等式刻画可以用来求解使得相应的闭环性能上界最小的最优保性能控制律。这样一个最优保性能控制律可以通过建立和求解以下的优化问题来得到。

$$\min z = (1 + h^*)\alpha + d^*\beta \quad (9.3.60)$$

s.t. (i) (9.3.54)

$$(ii) \begin{bmatrix} -\alpha I & U^T \\ U & -X \end{bmatrix} < 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} -\beta I & U^T \\ U & -M \end{bmatrix} < 0$$

问题 (9.3.60) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 求得该优化问题的全局最小值。

例 9.3.4 考虑不确定离散时滞系统 (9.3.43), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & -0.5 \\ 0.05 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$E_a = [0.2 \ 0 \ 0.3], \quad E_b = 0.4, \quad E_d = 0, \quad E_h = 0.2$$

状态和控制中的滞后时间上界分别是 $d^* = 2$ 和 $h^* = 1$, 系统初始条件集中的矩阵 $U = \text{diag}\{1.5, 1.5, 1.5\}$ 。系统的性能指标定义成 (9.3.46), 其中的加权矩阵是

$$Q = \text{diag}\{1, 1, 1\}, \quad R = 0.2$$

要求设计一个适当的无记忆状态反馈控制律,使得对所有允许的不确定性,闭环系统是渐近稳定的,闭环性能指标是有界的,且给出闭环性能指标的一个尽可能小的上界。

根据本小节提出的结论,这样一个要求可以通过设计系统的最优保性能控制律来实现。为此,根据定理 9.3.10,通过应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解相应的优化问题 (9.3.60),可得该问题的最优解是

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0.1294 & -0.0015 & 0.0347 \\ -0.0015 & 0.0130 & -0.0023 \\ 0.0347 & -0.0023 & 0.0343 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0.9658 & 0.2824 & 0.4205 \\ 0.2824 & 0.2136 & 0.2045 \\ 0.4205 & 0.2045 & 0.3564 \end{bmatrix} \\ N &= 0.0111, \quad W = [-0.0066 \quad -0.0005 \quad -0.0074] \\ \alpha &= 178.4421, \quad \beta = 33.3651, \quad \varepsilon = 0.0523 \end{aligned}$$

利用优化问题的这个可行解,可以构造出所考虑系统的最优保性能控制律

$$u(k) = [0.0102 \quad -0.0804 \quad -0.2312]x(k)$$

相应的闭环性能指标的上界 $J^* = 568.6914$ 。

可以用类似的方法讨论同时具有状态和控制滞后的连续时间不确定系统保性能控制问题。处理的关键也是如何从性能上界 (9.3.59) 导出 (9.3.56),据此可以应用凸优化方法有效地处理最优保性能控制问题。进一步,还可以考虑具有时变时滞系统的保性能控制问题。到目前为止,对于时滞依赖的鲁棒性能分析和控制器设计的结果,几乎还没有见到。

9.4 时滞系统的 H_∞ 控制

9.4.1 时滞系统的 H_∞ 性能分析

考虑以下的时滞系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统的状态向量, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ 是有限能量的外部扰动,即 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ 是被调输出, A 、 A_d 、 B 、 C 和 D 是已知的实常数矩阵, d 是滞后时间。

对给定的正常数 γ , 如果系统 (9.4.1) 具有以下性质:

- (i) 系统是渐近稳定的;
- (ii) 从外部扰动 $w(t)$ 到被调输出 $z(t)$ 的传递函数矩阵 $G_{wz}(s)$ 的 H_∞ 范数不超过给定的常数 γ , 即在零初始条件 $x(t) = 0$ ($t \in [-d, 0]$) 下,

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w \in L_2[0, \infty) \quad (9.4.2)$$

则称系统 (9.4.1) 具有 H_∞ 性能 γ 。不等式 (9.4.2) 反映了系统对外部扰动的抑制能力, 因此 γ 也称为系统对外部扰动的抑制度。 γ 越小, 表明系统的性能越好。

在分析系统 (9.4.1) 的 H_∞ 性能时, 还是采用以下的 Lyapunov 泛函:

$$V(x) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(\sigma)Sx(\sigma)d\sigma \quad (9.4.3)$$

其中: P 和 S 是两个适当的对称正定矩阵。

以下定理给出了系统 (9.4.1) 具有给定 H_∞ 性能 γ 的条件。

定理 9.4.1 对系统 (9.4.1) 和给定的常数 γ , 如果存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PB & C^T & PA_d \\ B^T P & -\gamma I & D^T & 0 \\ C & D & -\gamma I & 0 \\ A_d^T P & 0 & 0 & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.4)$$

则系统 (9.4.1) 具有 H_∞ 性能 γ 。

证明 从不等式 (9.4.4) 可推出

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} < 0$$

根据定理 9.1.1, 系统是渐近稳定的。

在零初始条件下, 考虑

$$J_\tau = \int_0^\tau (\gamma^{-1} z^T z - \gamma w^T w) dt$$

则对任意非零的外部扰动 $w \in L_2[0, \infty)$, 利用 Lyapunov 泛函 (9.4.3) 和零初始条件, 可以导出

$$\begin{aligned} J_\tau &= \int_0^\tau [\gamma^{-1} z^T z - \gamma w^T w + \dot{V}(x)] dt - V(x(\tau)) \\ &\leq \int_0^\tau [\gamma^{-1} z^T z - \gamma w^T w + \dot{V}(x)] dt \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(t)(PA + A^T P)x(t) + 2x^T(t)PA_d x(t-d) + 2x^T(t)PBw(t) \\ &\quad + x^T(t)Sx(t) - x^T(t-d)Sx(t-d) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + S & PB & PA_d \\ B^T P & 0 & 0 \\ A_d^T P & 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}$$

$$\gamma^{-1} z^T z - \gamma w^T w = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma^{-1} C^T C & \gamma^{-1} C^T D & 0 \\ \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (9.4.4) 等价于

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + S + \gamma^{-1} C^T C & PB + \gamma^{-1} C^T D & PA_d \\ B^T P + \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I & 0 \\ A_d^T P & 0 & -S \end{bmatrix} < 0$$

故

$$\begin{aligned} J_\tau &\leq \int_0^\tau [\gamma^{-1} z^T z - \gamma w^T w + \dot{V}(x)] dt \\ &= \int_0^\tau \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + S + \gamma^{-1} C^T C & PB + \gamma^{-1} C^T D & PA_d \\ B^T P + \gamma^{-1} D^T C & \gamma^{-1} D^T D - \gamma I & 0 \\ A_d^T P & 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix} dt < 0 \end{aligned}$$

即

$$\int_0^\tau z^T z dt < \gamma^2 \int_0^\tau w^T w dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w^T w dt$$

上式对所有的 $\tau > 0$ 成立。因此, 被调输出 $z(t) \in L_2[0, \infty)$, 且满足不等式 (9.4.2)。定理得证。

不等式 (9.4.4) 是关于所有未知变量的一个线性矩阵不等式, 故可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断该线性矩阵不等式的可行性问题。进而, 还可以通过求解优化问题

$$\min \gamma \quad (9.4.5)$$

$$\text{s.t. (9.4.4)}$$

$$P > 0$$

求出系统 (9.4.1) 的 H_∞ 性能指标 γ 的最小值。问题 (9.4.5) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

定理 9.4.1 的结论也可以推广到具有时变时滞的系统。如果系统 (9.4.1) 中的滞后时间 d 是时变的, 且满足

$$0 \leq d(t) < \infty, \quad \dot{d}(t) \leq \rho < 1 \quad (9.4.6)$$

则有:

推论 9.4.1 对具有时变时滞的系统 (9.4.1) 和给定的常数 γ , 其中滞后时间 $d(t)$ 满足 (9.4.6), 如果存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PB & C^T & PA_d \\ B^T P & -\gamma I & D^T & 0 \\ C & D & -\gamma I & 0 \\ A_d^T P & 0 & 0 & -(1-\rho)S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.7)$$

则系统 (9.4.1) 具有 H_∞ 性能 γ 。

9.4.2 H_∞ 控制器设计

基于前面的时滞系统 H_∞ 性能分析, 本小节将给出使得闭环系统具有给定 H_∞ 性能的控制设计方法。

考虑以下的时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{21} w(t)\end{aligned}\quad (9.4.8)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $w(t) \in \mathbf{R}^q$ 是有限能量的外部扰动, 即 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, $z(t) \in \mathbf{R}^p$ 是被调输出, $y(t) \in \mathbf{R}^l$ 是测量输出, $d(t)$ 是滞后时间, 且假定满足 (9.4.6), A 、 A_d 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 、 D_{11} 、 D_{12} 和 D_{21} 是已知的实常数矩阵, 假定 (A, B_2, C_2) 是能稳能检测的。

对给定的正常数 γ , 首先考虑无记忆的状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t) \quad (9.4.9)$$

其中的 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 是定常的反馈增益矩阵。将控制律 (9.4.9) 应用到系统 (9.4.8), 得到的闭环系统是

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + B_2 K)x(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 w(t) \\ z(t) &= (C_1 + D_{12} K)x(t) + D_{11} w(t)\end{aligned}\quad (9.4.10)$$

如果闭环系统 (9.4.10) 具有 H_∞ 性能 γ , 则控制律 (9.4.9) 称为是时滞系统 (9.4.8) 的一个 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律。

以下定理给出了时滞系统 (9.4.8) 存在 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律的条件及其设计方法。

定理 9.4.2 对系统 (9.4.8) 和给定的正常数 γ , 如果存在对称正定矩阵 X 、 Q 和矩阵 Y , 使得

$$\begin{bmatrix} (AX + B_2 Y)^T + AX + B_2 Y + Q & B_1 & (C_1 X + D_{12} Y)^T & A_d X \\ B_1^T & -\gamma^2 I & D_{11}^T & 0 \\ C_1 X + D_{12} Y & D_{11} & -\gamma^2 I & 0 \\ X A_d^T & 0 & 0 & -(1-\rho)Q \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.11)$$

则系统 (9.4.8) 存在无记忆的 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律。特别地, 若 $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Q})$ 是矩阵不等式 (9.4.11) 的一个可行解, 则

$$u(t) = \hat{Y} \hat{X}^{-1} x(t) \quad (9.4.12)$$

是所考虑系统的一个 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律。

证明 根据推论 9.4.1, 系统存在 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律 (9.4.9) 的一个充分条件是存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)^\top P + P(A+B_2K) + S & PB_1 & (C_1+D_{12}K)^\top & PA_d \\ B_1^\top P & -\gamma I & D_{11}^\top & 0 \\ C_1+D_{12}K & D_{11} & -\gamma I & 0 \\ A_d^\top P & 0 & 0 & -(1-\rho)S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.13)$$

对上式分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$$

并记 $X = P^{-1}$, $Y = KP^{-1}$, $Q = P^{-1}SP^{-1}$, 则矩阵不等式 (9.4.13) 等价于不等式 (9.4.11)。定理得证。

矩阵不等式 (9.4.11) 是矩阵变量 X 、 Y 、 Q 的一个线性矩阵不等式, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式的可行性问题, 并得到它的一个可行解。利用这个可行解, 按 (9.4.12) 式可以构造得到系统的 γ -次优状态反馈 H_∞ 控制律。

另外, 我们也可以通过求解以下的优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma \\ \text{s.t.} \quad & (9.4.11) \\ & X > 0 \end{aligned} \quad (9.4.14)$$

来求取使得闭环系统的扰动抑制度 γ 最小化的状态反馈 H_∞ 控制律。这个控制律称为是时滞系统 (9.4.8) 的最优状态反馈 H_∞ 控制律。由于问题 (9.4.14) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 故可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `mincx` 来求解该问题。

如果时滞系统 (9.4.8) 的状态不是直接可测量的, 则需要考虑输出反馈控制器。为此, 考虑具有以下状态空间实现的动态输出反馈控制器:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_c \xi(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c \xi(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

其中: $\xi \in \mathbf{R}^k$ 是控制器的状态, A_c 、 B_c 、 C_c 和 D_c 是待定的具有适当维数的实常数矩阵。将控制器 (9.4.15) 应用到时滞系统 (9.4.8), 得到的闭环系统是

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{A}_d \bar{x}(t-d(t)) + \bar{B} w(t) \\ z(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) + \bar{D} w(t) \end{aligned} \quad (9.4.16)$$

其中:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{A}}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{C}} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c], \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{21}\end{aligned}$$

则我们关心的问题是给定的正常数 γ , 设计一个输出反馈控制器 (9.4.15), 使得闭环系统 (9.4.16) 具有给定的 H_∞ 性能 γ , 具有这样性质的控制器 (9.4.15) 称为是系统 (9.4.8) 的一个 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器。

应用推论 9.4.1, 可得到系统 (9.4.8) 存在 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器 (9.4.15) 的条件:

定理 9.4.3 控制器 (9.4.15) 是系统 (9.4.8) 的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器, 如果存在对称正定矩阵 \mathbf{P} 和 \mathbf{S} , 使得

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{E}^\top \mathbf{S} \mathbf{E} & \mathbf{P} \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}}^\top & \mathbf{P} \mathbf{A}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}^\top \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & \bar{\mathbf{D}}^\top & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{D}} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^\top \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(1-\rho) \mathbf{S} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (9.4.17)$$

其中:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$$

矩阵不等式 (9.4.17) 不是一个关于所有未知变量的线性矩阵不等式, 因此, 基于矩阵不等式 (9.4.17) 来设计所求的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器是相当复杂的。以下采用第 5 章中提出的消元法来设计系统的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器。为此, 定义控制器的参数矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_c & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \quad (9.4.18)$$

并定义以下的矩阵

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{00} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{0}] \\ \mathbf{C}_{00} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = [\mathbf{D}_{12} \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (9.4.19)$$

则闭环系统矩阵可以写成

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_{00} \mathbf{K} \mathbf{C}_{00}, \quad \bar{\mathbf{A}}_d = \mathbf{A}_1 \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{00} \mathbf{K} \mathbf{D}_2 \\ \bar{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_1 \mathbf{K} \mathbf{C}_{00}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_1 \mathbf{K} \mathbf{D}_2\end{aligned} \quad (9.4.20)$$

(9.4.19) 式中的矩阵只包含模型的数据, (9.4.20) 式中的闭环系统矩阵表示成了控制器参数矩阵 \mathbf{K} 的仿射函数。利用这些矩阵, 不等式 (9.4.17) 可以表示成

$$\Phi + \Sigma \Pi K \Theta^T + \Theta K^T \Pi^T \Sigma^T < 0 \quad (9.4.21)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}\{P, I, I, I\} \\ \Pi &= [B_{00}^T \quad 0 \quad D_1^T \quad 0]^T \\ \Theta &= [C_{00} \quad D_2 \quad 0 \quad 0]^T \\ \Phi &= \begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + E^T S E & P B_0 & C_0^T & P A_1 \\ B_0^T P & -\mathcal{H} & D_{11}^T & 0 \\ C_0 & D_{11} & -\mathcal{H} & 0 \\ A_1^T P & 0 & 0 & -(1-\rho)S \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据定理 2.4.1, 不等式 (9.4.21) 关于矩阵变量 K 是可解的, 当且仅当

$$N_H^T \Sigma^{-1} \Phi \Sigma^{-1} N_H < 0, \quad N_\Theta^T \Phi N_\Theta < 0 \quad (9.4.22)$$

其中: N_H 和 N_Θ 分别是矩阵 Π 和 Θ 的正交补。条件 (9.4.22) 中的不等式不包含矩阵变量 K 。为了进一步简化 (9.4.22) 式中矩阵不等式的表示, 将矩阵 P 和它的逆矩阵 P^{-1} 分块:

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & * \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & * \end{bmatrix} \quad (9.4.23)$$

其中: $X, Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $M, N \in \mathbf{R}^{n \times k}$, $*$ 表示不相关的块矩阵, 分别选取 $[B_2^T \quad D_{12}^T]^T$ 和 $[C_2 \quad D_{21}]^T$ 的正交补矩阵 $[W_1^T \quad W_2^T]^T$ 和 $[W_3^T \quad W_4^T]^T$, 则

$$N_H = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ W_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad N_\Theta = \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ W_4 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

因此, (9.4.22) 式中的矩阵不等式可以转化成

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ W_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X A^T + A X + X S X & X C_1^T & B_1 & A_d \\ C_1 X & -\mathcal{H} & D_{11} & 0 \\ B_1^T & D_{11}^T & -\mathcal{H} & 0 \\ A_d^T & 0 & 0 & -(1-\rho)S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ W_2 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.24)$$

$$\begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ W_4 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Y + Y A + S & Y B_1 & C_1^T & Y A_d \\ B_1^T Y & -\mathcal{H} & D_{11}^T & 0 \\ C_1 & D_{11} & -\mathcal{H} & 0 \\ A_d^T Y & 0 & 0 & -(1-\rho)S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_3 & 0 & 0 \\ W_4 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.25)$$

由于 $S > 0$, 根据矩阵的 Schur 补性质, 不等式 (9.4.24) 进一步等价于

$$\begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} XA^T + AX & XC_1^T & B_1 & A_d & X \\ C_1X & -\gamma I & D_{11} & 0 & 0 \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I & 0 & 0 \\ A_d^T & 0 & 0 & -(1-\rho)S & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & -S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ W_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.26)$$

总结以上的分析, 可得:

定理 9.4.4 考虑系统 (9.4.8) 和给定的正常数 γ , 设 $\begin{bmatrix} W_1^T & W_2^T \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} W_3^T & W_4^T \end{bmatrix}^T$ 分别是 $\begin{bmatrix} B_1^T & D_{11}^T \end{bmatrix}^T$ 和 $\begin{bmatrix} C_1 & D_{11} \end{bmatrix}^T$ 的正交补矩阵。如果对给定的对称正定矩阵 S , 存在对称正定矩阵 X 和 Y , 满足线性矩阵不等式 (9.4.25)、(9.4.26) 和

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9.4.27)$$

则系统 (9.4.8) 存在一个 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器 (9.4.15)。

证明 存在一个对称正定矩阵 P , 满足关系式 (9.4.23), 当且仅当不等式 $X - Y^{-1} \geq 0$, 而这一不等式等价于 (9.4.27)。由此及前面的分析, 可得定理的结论。

根据定理 9.4.4, 可以得到系统 (9.4.8) 的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器的设计方法:

1. 对给定的对称正定矩阵 S , 通过求解线性矩阵不等式系统 (9.4.25) ~ (9.4.27), 得到可行解 X, Y ;

2. 计算满足 $MN^T = I - XY$ 的满秩矩阵 $M, N \in \mathbb{R}^{n \times k}$ (可以通过矩阵的奇异值分解计算);

3. 从线性方程 $\begin{bmatrix} Y & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & M^T \end{bmatrix}$ 计算对称正定矩阵 P ;

4. 对上一步求得的矩阵 P , 不等式 (9.4.21) 是关于矩阵变量 K 的一个线性矩阵不等式。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `basiclmi` 来求解线性矩阵不等式 (9.4.21), 得到控制器参数矩阵 K 。

以上得到的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器的维数依赖于矩阵 P 的维数, 而矩阵 P 的维数依赖于矩阵 $I - XY$ 的维数, 因此, 关于控制器的维数, 可得:

推论 9.4.2 假定对给定的对称正定矩阵 S , 线性矩阵不等式系统 (9.4.25) ~ (9.4.27) 是可行的, 如果对该线性矩阵不等式系统的一个可行解 X, Y ,

$$\text{Rank}(I - XY) = k < n \quad (9.4.28)$$

则系统 (9.4.8) 存在一个 k 阶的 γ -次优输出反馈 H_∞ 控制器。

例 9.4.1 考虑系统 (9.4.8), 其中

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = [1 \quad 3] \\
 D_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = 1
 \end{aligned}$$

其中滞后时间 $h(t) = 5 + 0.5 \sin t$, 则 $\rho = 0.5$ 。设 $\gamma = 2$, 取 $S = I_2$, 则线性矩阵不等式系统 (9.4.25) ~ 9.4.27) 的一个可行解是

$$X = \begin{bmatrix} 1.8121 & 0.1500 \\ 0.1500 & 0.5537 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3.8725 & 0.8445 \\ 0.8445 & 2.1685 \end{bmatrix}$$

满足 $MN^T = I - XY$ 的矩阵 M 和 N 是

$$M = \begin{bmatrix} -1.9858 & -0.1682 \\ -0.1682 & 0.9858 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 6.2328 & 0 \\ 1.8841 & -0.0107 \end{bmatrix}$$

由此得到的对称正定矩阵 P 是

$$P = \begin{bmatrix} 3.8725 & 0.8445 & 6.2328 & 0 \\ 0.8445 & 2.1685 & 1.8841 & -0.0107 \\ 6.2328 & 1.8841 & 11.7449 & -0.0026 \\ 0 & -0.0107 & -0.0026 & 0.0056 \end{bmatrix}$$

通过求解线性矩阵不等式 (9.4.21), 可得一个所求的输出反馈 H_∞ 控制器 (9.4.15) 是

$$K = \left[\begin{array}{c|c} D_c & C_c \\ \hline B_c & A_c \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|cc} -1.3051 & -4.2301 & 0.0858 \\ -0.3660 & -2.7411 & 0.0027 \\ \hline 1.2079 & 1.5247 & -8.4108 \end{array} \right]$$

9.4.3 不确定离散时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

上一小节讨论了具有状态滞后的一类连续时间线性系统 H_∞ 控制问题。事实上, 这一处理方法可以推广到同时具有状态和控制滞后的系统, 也可以用类似的方法来处理离散时滞系统。进一步, 对同时具有模型参数不确定性和外部扰动不确定性的时滞系统, 鲁棒 H_∞ 控制问题也得到了广泛的研究。根据参数不确定性的不同描述, 提出了各种鲁棒 H_∞ 性能分析和控制器设计方法。这一小节将研究具有 Frobenius 范数有界参数不确定性离散时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 这不仅使得研究对象从连续系统扩展到离散系统, 而且还将引进一类新的参数不确定性。

考虑以下一类具有参数不确定性的离散时滞系统:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \bar{A}(k)x(k) + \bar{A}_d(k)x(k-d) + \bar{B}(k)u(k) + \bar{B}_1(k)w(k) \\
&= (A + H\Delta(k)E_1)x(k) + (A_d + H\Delta(k)E_d)x(k-d) \\
&\quad + (B + H\Delta(k)E_2)u(k) + (B_1 + H\Delta(k)E_3)w(k) \\
&= \left(A + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s H_i \Delta_{ij}(k) E_{1j} \right) x(k) + \left(A_d + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s H_i \Delta_{ij}(k) E_{d_j} \right) x(k-d) \\
&\quad + \left(B + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s H_i \Delta_{ij}(k) E_{2j} \right) u(k) + \left(B_1 + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s H_i \Delta_{ij}(k) E_{3j} \right) w(k) \quad (9.4.29)
\end{aligned}$$

$$z(k) = Cx(k) + Du(k) + D_1w(k) \quad (9.4.30)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $u(k) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $w(k) \in \mathbf{R}^p$ 是外部扰动输入, 且是平方可和的, 即 $w \in L_2[0, \infty)$, $z(k) \in \mathbf{R}^q$ 是被调输出, A 、 A_d 、 B 、 B_1 、 C 、 D 、 D_1 、 E_{ij} 和 H_i 是描述名义系统模型的已知实常数矩阵, 记

$$\begin{aligned}
H &= [H_1 \quad H_2 \quad \cdots \quad H_r] \\
E_l &= [E_{l1}^T \quad E_{l2}^T \quad \cdots \quad E_{ls}^T]^T, \quad l=1, 2, 3, d
\end{aligned}$$

矩阵

$$\Delta(k) = \begin{bmatrix} \Delta_{11}(k) & \Delta_{12}(k) & \cdots & \Delta_{1s}(k) \\ \Delta_{21}(k) & \Delta_{22}(k) & \cdots & \Delta_{2s}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{r1}(k) & \Delta_{r2}(k) & \cdots & \Delta_{rs}(k) \end{bmatrix}$$

是一个满足

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \|\Delta_{ij}(k)\|^2 \leq 1 \quad (9.4.31)$$

的不确定矩阵, 其中范数 $\|\cdot\|$ 取矩阵的 2-范数。矩阵 $\Delta_{ij}(k)$ 包含了出现在系统模型中的不确定参数, 它们不仅可以是时变的, 而且也可以依赖系统的状态向量, 只要满足不等式 (9.4.31)。以下, 为记号上的简便, 我们将省去矩阵 $\Delta(k)$ 、 $\Delta_{ij}(k)$ 、 $\bar{A}(k)$ 、 $\bar{A}_d(k)$ 、 $\bar{B}(k)$ 和 $\bar{B}_1(k)$ 中的时间变量 k 。

使用矩阵的 Frobenius 范数, 关系式 (9.4.31) 可以表示成 $\|\bar{\Delta}\|_F \leq 1$, 其中矩阵

$$\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \|\Delta_{11}\| & \|\Delta_{12}\| & \cdots & \|\Delta_{1s}\| \\ \|\Delta_{21}\| & \|\Delta_{22}\| & \cdots & \|\Delta_{2s}\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|\Delta_{r1}\| & \|\Delta_{r2}\| & \cdots & \|\Delta_{rs}\| \end{bmatrix} \quad (9.4.32)$$

因此, 满足 (9.4.31) 的参数不确定性称为具有 Frobenius 范数有界的参数不确定性。

在前面几章中, 我们研究了具有参数不确定性系统的鲁棒控制问题, 其中的一类参数不确定性是范数有界参数不确定性, 即不确定参数矩阵 Δ 满足 $\Delta^T \Delta \leq I$, 此时所取的范数

是 2-范数或最大奇异值范数。特别地, 当不确定矩阵 Δ 只包含一个块矩阵, 即 $r = s = 1$ 时, 不确定矩阵 Δ 就是一个 2-范数有界的不确定矩阵。由此可以看出, 具有 Frobenius 范数有界的参数不确定性是一类更广的参数不确定性。另一方面, 考虑

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然, $\Delta_1 \neq \Delta_2$ 。但是, $\sigma_{\max}(\Delta_1) = \sigma_{\max}(\Delta_2) = 1$, 即这两个矩阵的最大奇异值是相等的, 它们的 2-范数是相等的。而 $\|\Delta_1\|_F = 1$, $\|\Delta_2\|_F = \sqrt{2}$, 因此它们的 Frobenius 范数是不相等的。这个例子说明了在某些情况下, Frobenius 范数是比 2-范数更好的一种不确定性的度量工具。

以下定义给出了系统 (9.4.29) 和 (9.4.30) 的鲁棒 H_∞ 控制概念。

定义 9.4.1 对给定的常数 $\gamma > 0$, 状态反馈控制律 $u(k) = Fx(k)$ 称为是系统 (9.4.29) 和 (9.4.30) 的 γ -次优 H_∞ 控制律。如果对所有满足 (9.4.31) 的参数不确定性, 以下条件成立:

- (i) 闭环系统是渐近稳定的;
- (ii) 在零初始条件下, 被调输出 $z(k)$ 满足

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \quad (9.4.33)$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示空间 $L_2[0, \infty)$ 中的标准范数。

引理 9.4.1 对给定的矩阵 $V = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_r]$ 、 $W = [W_1^T \ W_2^T \ \cdots \ W_s^T]^T$ 和对称矩阵 Q , 矩阵不等式

$$\begin{aligned} & Q + V\Delta W + W^T \Delta^T V^T \\ &= Q + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s V_i \Delta_{ij} W_j + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s W_j^T \Delta_{ji}^T V_i^T < 0 \end{aligned}$$

对所有满足 (9.4.31) 的不确定矩阵 Δ_{ij} , $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$ 成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q + \varepsilon VV^T + \varepsilon^{-1} W^T W < 0$$

证明 注意 $\|\Delta\|_F^2 = \text{Trace}(\Delta^T \Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\Delta^T \Delta)$, 其中 $\lambda_i(\cdot)$ 表示矩阵的第 i 个特征向量。由此, 从 $\|\Delta\|_F^2 \leq 1$ 可推出 $\Delta^T \Delta \leq I$ 。进一步由引理 5.4.1 可得本引理的结论。

应用控制律 $u(k) = Fx(k)$ 后得到的闭环系统是

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}_c x(k) + \bar{A}_d x(k-d) + \bar{B}_1 w(k) \\ z(k) &= \bar{C}_c x(k) + \bar{D}_1 w(k) \end{aligned} \quad (9.4.34)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{A}_c &= A_c + H_1 \Delta E_c = A + BF + H_1 \Delta (E_1 + E_2 F) \\ \bar{C}_c &= C_c + H_2 \Delta E_c = C + DF + H_2 \Delta (E_1 + E_2 F) \end{aligned}$$

以下定理给出了系统存在 γ -次优 H_∞ 控制律的条件。

定理 9.4.5 对给定的常数 $\gamma > 0$ ，系统 (9.4.29) 和 (9.4.30) 存在 γ -次优 H_∞ 控制律 $u(k) = Fx(k)$ 的一个充分条件是存在对称正定矩阵 P 和 S ，使得对所有允许的参数不确定性，以下矩阵不等式成立。

$$\begin{bmatrix} -P+S & 0 & 0 & \bar{A}_c^\top & C_c^\top \\ 0 & -S & 0 & \bar{A}_d^\top & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & \bar{B}_1^\top & D_1^\top \\ \bar{A}_c & \bar{A}_d & \bar{B}_1 & -P^{-1} & 0 \\ C_c & 0 & D_1 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.35)$$

证明 如果存在对称正定矩阵 P 和 S 满足矩阵不等式 (9.4.35)，定义一个 Lyapunov 函数 $V(k)$ ：

$$V(k) = x^\top(k)Px(k) + \sum_{i=1}^d x^\top(k-i)Sx(k-i)$$

则 $V(k)$ 是正定的，且在 $w(k) = 0$ 时， $V(k)$ 的前向差分

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k+1) - V(k) \\ &= x^\top(k+1)Px(k+1) - x^\top(k)Px(k) + x^\top(k)Sx(k) - x^\top(k-d)Sx(k-d) \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix}^\top \left(\begin{bmatrix} \bar{A}_c^\top \\ \bar{A}_d^\top \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P+S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此， $\Delta V(k) < 0$ 的一个充分条件是

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_c^\top \\ \bar{A}_d^\top \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P+S & 0 \\ 0 & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.36)$$

根据矩阵的 Schur 补性质，上式等价于

$$\begin{bmatrix} -P+S & 0 & \bar{A}_c^\top \\ 0 & -S & \bar{A}_d^\top \\ \bar{A}_c & \bar{A}_d & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

由矩阵不等式 (9.4.35) 可得上式成立。因此，闭环系统 (9.4.34) 是渐近稳定的。

进而，对任意非零的 $w(k) \in L_2[0, \infty)$ ，

$$\begin{aligned} \Delta V(k) + z^\top(k)z(k) - \gamma^2 w^\top(k)w(k) \\ &= \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix}^\top \left(\begin{bmatrix} \bar{A}_c^\top \\ \bar{A}_d^\top \\ \bar{B}_1^\top \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_d & \bar{B}_1 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} -P+S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c^\top \\ 0 \\ D_1^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c & 0 & D_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d) \\ w(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

应用矩阵的 Schur 补性质, 从矩阵不等式 (9.4.35) 可推出

$$\Delta V(k) + z^T(k)z(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) < 0, \quad \forall k > 0$$

由零初始条件, 可得

$$\sum_{i=1}^N z^T(k)z(k) - \gamma^2 \sum_{i=1}^N w^T(k)w(k) < -V(N) \leq 0, \quad \forall N > 0$$

由此及 $w \in L_2[0, \infty)$ 即可得到不等式 (9.4.33)。定理得证。

以下定理证明了定理 9.4.5 的条件可以转化成线性矩阵不等式的可行性问题。

定理 9.4.6 存在对称正定矩阵 P 和 S , 使得对所有允许的不确定矩阵 Δ , 矩阵 (9.4.35) 成立, 当且仅当关于 $\varepsilon > 0$, $X > 0$, $T > 0$ 的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X+T & 0 & 0 & XA_c^T & XC_c^T & XE_c^T \\ 0 & -T & 0 & XA_d^T & 0 & XE_d^T \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_1^T & D_1^T & E_3^T \\ A_c X & A_d X & B_1 & -X+\varepsilon HH^T & 0 & 0 \\ C_c X & 0 & D_1 & 0 & -I & 0 \\ E_c X & E_d X & E_3 & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.37)$$

是可行的。

证明 矩阵不等式 (9.4.35) 可以写成

$$\begin{bmatrix} -P+S & 0 & 0 & A_c^T & C_c^T \\ 0 & -S & 0 & A_d^T & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_1^T & D_1^T \\ A_c & A_d & B_1 & -P^{-1} & 0 \\ C_c & 0 & D_1 & 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} E_c & E_d & E_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_c & E_d & E_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \Delta^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0$$

定义

$$Q = \begin{bmatrix} -P+S & 0 & 0 & A_c^T & C_c^T \\ 0 & -S & 0 & A_d^T & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_1^T & D_1^T \\ A_c & A_d & B_1 & -P^{-1} & 0 \\ C_c & 0 & D_1 & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \\ 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} E_c & E_d & E_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

则根据引理 9.4.1, 对所有允许的不确定矩阵 Δ , 矩阵不等式 (9.4.35) 成立当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q + \varepsilon V V^T + \varepsilon^{-1} W^T W < 0$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 以上不等式等价于

$$\begin{bmatrix} -P+S & 0 & 0 & A_c^T & C_c^T & E_c^T \\ 0 & -S & 0 & A_d^T & 0 & E_d^T \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_1^T & D_1^T & E_3^T \\ A_c & A_d & B_1 & -P^{-1} + \varepsilon H H^T & 0 & 0 \\ C_c & 0 & D_1 & 0 & -I & 0 \\ E_c & E_d & E_3 & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.38)$$

分别用矩阵

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

左乘和右乘不等式 (9.4.38), 并记 $X = P^{-1}$ 和 $T = X S X$, 即可得到矩阵不等式 (9.4.37)。定理得证。

从定理 9.4.5 和定理 9.4.6 可以得到 γ -次优 H_∞ 状态反馈控制律的设计方法。

定理 9.4.7 对给定的常数 $\gamma > 0$, 如果存在标量 $\varepsilon > 0$ 、对称正定矩阵 X 和 T 、矩阵 Y , 满足矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -X+T & 0 & 0 & (AX+BY)^T & (CX+DY)^T & (E_1X+E_2Y)^T \\ 0 & -T & 0 & XA_d^T & 0 & XE_d^T \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & B_1^T & D_1^T & E_3^T \\ AX+BY & A_dX & B_1 & -X+\varepsilon H H^T & 0 & 0 \\ CX+DY & 0 & D_1 & 0 & -I & 0 \\ E_1X+E_2Y & E_dX & E_3 & 0 & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0 \quad (9.4.39)$$

则 $u(k) = YX^{-1}x(k)$ 是系统 (9.4.29) 和 (9.4.30) 的一个 γ -次优 H_∞ 控制律。

不等式 (9.4.39) 是一个线性矩阵不等式, 因此对给定的正常数 γ , 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来判断该线性矩阵不等式的可行性, 并在可行的情况下, 利用得到的可行解按 $u(k) = YX^{-1}x(k)$ 构造得到系统的一个 γ -次优 H_∞ 控制律。进一步, 也可以据此并应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 设计使得性能指标 γ 最小化的最优鲁棒 H_∞ 状态反馈控制律。

第 10 章 滤波器设计

在系统状态空间模型中，系统的状态往往不能直接测量得到，因此需要用系统的输入输出信息来重构系统的状态向量，或估计系统状态向量的某个线性组合。这样的思想不仅可用在系统的控制中，而且在测量技术的发展中也得到了深入的研究和应用，形成了一个新的方向——软测量技术。Luenberger 观测器和最优线性二次型 Kalman 滤波器的提出为这一思想的实现提供了方法和技术。

对一个精确已知的系统，如果系统和测量中存在的扰动已知是白噪声或具有已知谱密度的噪声，则可以用估计误差方差作为衡量滤波器好坏的一个性能指标，进而通过这一性能指标的最小化，来设计最优滤波器。然而，当系统扰动的统计特性难以确定时，可以将扰动看作是有限能量的任意信号，因此可以用扰动输入到估计误差的传递函数的 H_2 范数作为滤波器的性能指标，通过使这一性能指标小于某个给定的值来设计系统的 H_2 滤波器。 H_2 滤波器在雷达设计、故障检测、信号处理等领域中已有了广泛的应用。

滤波器问题是输出反馈控制器设计问题的一个对偶问题，因此，前面介绍的不确定系统鲁棒控制问题的处理方法都可以用来解决滤波器的设计问题。特别是最近几年，基于线性矩阵不等式处理的变量替换方法被用来设计一般结构的滤波器，所考虑的系统从线性定常系统推广到不确定参数系统、无时滞系统到时滞系统、单目标性能的滤波器到多目标性能的滤波器，不断涌现出新的研究方法和结果。

本章基于线性矩阵不等式处理方法，介绍 H_∞ 滤波器的设计方法，进而对一类不确定系统给出鲁棒 H_∞ 滤波器的设计方法。

10.1 H_∞ 滤波器设计

考虑由以下状态方程描述的线性时不变系统：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), & \mathbf{x}_0 &= \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{10.1.1}$$

其中： $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量， $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是测量输出， $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是噪声信号（包括过程和测量噪声）， $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^p$ 是待估计的信号向量， \mathbf{x}_0 是初始状态，假定其是已知的，且不失一般性，可以假定 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ 。

在滤波器的设计中，总是假定系统 (10.1.1) 是渐近稳定的。由于估计误差依赖于系统 (10.1.1) 的状态，因此，系统 (10.1.1) 的稳定性对于保证估计误差的有界性是必要的。

对给定的常数 $\gamma > 0$, 要求设计一个渐近稳定的线性滤波器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), \quad \hat{x}_0 = 0 \\ \hat{z}(t) &= C_f \hat{x}(t) + D_f y(t)\end{aligned}\quad (10.1.2)$$

使得从扰动输入 w 到估计误差 $\tilde{z} = z - \hat{z}$ 的传递函数的 H_∞ 范数小于给定的常数 γ 。具有这样性质的滤波器 (10.1.2) 称为是系统 (10.1.1) 的一个 H_∞ 滤波器。

定义 $\tilde{x}(t) = [x^T(t) \quad \hat{x}^T(t)]^T$, 则滤波误差动态方程是

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t), \quad \tilde{x}_0 = 0 \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t)\end{aligned}\quad (10.1.3)$$

其中:

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \\ \tilde{C} &= [L - D_f C \quad -C_f], \quad \tilde{D} = -D_f D\end{aligned}\quad (10.1.4)$$

则 H_∞ 滤波器的设计问题是要求设计滤波器 (10.1.2), 使得滤波误差动态系统 (10.1.3) 是渐近稳定的, 且扰动 w 到估计误差 \tilde{z} 的传递函数 $H_{\tilde{z}w}(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}$ 满足 $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma$ 。

根据连续时间系统的有界实引理, 可以得到 H_∞ 滤波器的存在条件:

定理 10.1.1 对给定的常数 $\gamma > 0$, 系统 (10.1.1) 存在一个 H_∞ 滤波器 (10.1.2) 当且仅当存在对称矩阵 $P > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}^T P + P \tilde{A} & P \tilde{B} & \tilde{C}^T \\ \tilde{B}^T P & -I & \tilde{D}^T \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10.1.5)$$

其中的 \tilde{A} 、 \tilde{B} 、 \tilde{C} 、 \tilde{D} 由式 (10.1.4) 确定。

可以依据这个 H_∞ 滤波器的存在条件来设计所要求的 H_∞ 滤波器。由于不等式 (10.1.5) 是矩阵变量 P 、 A_f 、 B_f 、 C_f 、 D_f 的一个非线性矩阵不等式, 要直接从该矩阵不等式求出可行的矩阵变量 P 、 A_f 、 B_f 、 C_f 、 D_f 仍然是一件很困难的事。以下仍将采用变量替换方法, 设法将矩阵不等式 (10.1.5) 转化成一个线性矩阵不等式, 从而可以应用 LMI 工具箱中求解线性矩阵不等式的有效方法来设计 H_∞ 滤波器。

对矩阵 P 和它的逆 P^{-1} 作以下分块:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}$$

其中: $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。由 $PP^{-1} = I$, 可得

$$I - P_{11}S_{11} = P_{12}S_{12}^T \quad (10.1.6)$$

定义

$$J = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ S_{12}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} = \begin{bmatrix} I & P_{11} \\ 0 & P_{12}^T \end{bmatrix}$$

则 $PJ = \tilde{J}$ 。通过矩阵的初等运算可得

$$\begin{aligned} J^T P \tilde{A} J &= \begin{bmatrix} AS_{11} & A \\ P_{11}AS_{11} + P_{12}B_fCS_{11} + P_{12}A_fS_{12}^T & P_{11}A + P_{12}B_fC \end{bmatrix} \\ J^T P \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B \\ P_{11}B + P_{12}B_fD \end{bmatrix} \\ J^T \tilde{C}^T &= \begin{bmatrix} S_{11}L^T - S_{11}C^TD_f^T - S_{11}C_f^T \\ L^T - C^TD_f^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义

$$Z = P_{12}B_f, \quad \tilde{Z} = C_fS_{12}^T, \quad \hat{Z} = P_{12}A_fS_{12}^T \quad (10.1.7)$$

则对不等式 (10.1.5) 左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{J^T, I, I\}$ 和它的逆矩阵, 可得矩阵不等式 (10.1.5) 等价于

$$\begin{bmatrix} AS_{11} + S_{11}A^T & A + S_{11}A^TP_{11} + S_{11}C^TZ^T + \hat{Z}^T & * & * & * \\ * & A^TP_{11} + P_{11}A + ZC + C^TZ^T & * & * & * \\ * & * & B & S_{11}L^T - S_{11}C^TD_f^T - \tilde{Z}^T & * \\ * & * & P_{11}B + ZD & L^T - C^TD_f^T & * \\ * & * & -I & -D^TD_f^T & * \\ * & * & * & -\gamma^2 I & * \end{bmatrix} < 0 \quad (10.1.8)$$

其中*处的子块可由矩阵的对称性得到。进一步对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{S_{11}^{-1}, I, I, I\}$, 可得矩阵不等式 (10.1.8) 等价于

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{-1}A + A^TS_{11}^{-1} & S_{11}^{-1}A + A^TP_{11} + C^TZ^T + S_{11}^{-1}\hat{Z}^T & S_{11}^{-1}B & L^T - C^TD_f^T - S_{11}^{-1}\tilde{Z}^T \\ * & A^TP_{11} + P_{11}A + C^TZ^T + ZC & P_{11}B + ZD & L^T - C^TD_f^T \\ * & * & -I & -D^TD_f^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10.1.9)$$

再定义一组新变量:

$$R = S_{11}^{-1}, \quad X = P_{11}, \quad M = \hat{Z}R, \quad N = \tilde{Z}R \quad (10.1.10)$$

则从矩阵不等式 (10.1.9) 可得

$$\begin{bmatrix} RA + A^T R & RA + A^T X + C^T Z^T + M^T & RB & L^T - C^T D_f^T - N^T \\ * & A^T X + XA + C^T Z^T + ZC & XB + ZD & L^T - C^T D_f^T \\ * & * & -I & -D^T D_f^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10.1.11)$$

另一方面, 矩阵 $P > 0$ 成立当且仅当 $J^T P J = \begin{bmatrix} S_{11} & I \\ I & P_{11} \end{bmatrix} > 0$ 。后者进一步等价于

$$P_{11} - S_{11}^{-1} = X - R > 0 \quad (10.1.12)$$

总结以上讨论, 可得:

定理 10.1.2 对给定的常数 $\gamma > 0$, 系统 (10.1.1) 存在一个 γ -次优 H_∞ 滤波器当且仅当存在对称矩阵 $R > 0$, $X > 0$ 和矩阵 M , N , Z , D_f , 使得矩阵不等式 (10.1.11) 和 (10.1.12) 成立。

容易看到, 不等式 (10.1.11) ~ (10.1.12) 是未知矩阵变量 R , X , M , N , Z , D_f 的一个线性矩阵不等式系统。因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来检验该线性矩阵不等式的可行性, 并在可行的情况下求出相应的可行解。

若 R , X , M , N , Z , D_f 是线性矩阵不等式系统 (10.1.11) ~ (10.1.12) 的一个可行解, 则从不等式 (10.1.12) 可知矩阵 $I - P_{11} S_{11}$ 是可逆的。故从方程 (10.1.6) 可得可逆矩阵 P_{12} 和 S_{12} (例如采用矩阵奇异值分解的方法)。进而, 利用变量替换公式 (10.1.10) 和 (10.1.7) 可得

$$A_f = P_{12}^{-1} \hat{Z} (S_{12}^T)^{-1}, \quad C_f = \tilde{Z} (S_{12}^T)^{-1}, \quad B_f = P_{12}^{-1} Z$$

因此, 滤波器的传递函数矩阵

$$H_{\hat{y}}(s) = \tilde{Z} (S_{12}^T)^{-1} [sI - P_{12}^{-1} \hat{Z} (S_{12}^T)^{-1}]^{-1} P_{12}^{-1} Z + D_f$$

利用矩阵的运算和关系式 (10.1.6), 进一步可得到

$$\begin{aligned} H_{\hat{y}}(s) &= \tilde{Z} [s(P_{12} S_{12}^T) - \hat{Z}]^{-1} Z + D_f \\ &= \tilde{Z} [s(I - P_{11} S_{11}) - \hat{Z}]^{-1} Z + D_f \\ &= N [s(R - X) - M]^{-1} Z + D_f \end{aligned}$$

由此可得, 具有系数矩阵

$$A_f = (R - X)^{-1} M, \quad B_f = (R - X)^{-1} Z, \quad C_f = N \quad (10.1.13)$$

和 D_f 的滤波器 (10.1.2) 也是系统 (10.1.1) 的一个 γ -次优 H_∞ 滤波器。

以上分析说明了, 若线性矩阵不等式系统 (10.1.11) ~ (10.1.12) 是可行的, 则可以应用其可行解直接构造系统 (10.1.1) 的 γ -次优 H_∞ 滤波器, 而无需再通过方程 (10.1.6) 求矩阵 P_{12} 和 S_{12} 的值。这和采用变量替换方法来设计输出反馈控制器时的情形不同。

进一步, 通过建立和求解以下的优化问题:

$$\begin{aligned}
 & \min \rho & (10.1.14) \\
 \text{s.t.} & \begin{bmatrix} RA + A^T R & RA + A^T X + C^T Z^T + M^T & RB & L^T - C^T D_f^T - N^T \\ * & A^T X + XA + C^T Z^T + ZC & XB + ZD & L^T - C^T D_f^T \\ * & * & -I & -D^T D_f^T \\ * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \\
 & X - R > 0
 \end{aligned}$$

按照 (10.1.13) 式, 利用问题 (10.1.14) 的最优解可以构造系统 (10.1.1) 的最优 H_∞ 滤波器。而问题 (10.1.14) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题的全局最优解。

如果要求设计的滤波器是严格真的, 则可以在矩阵不等式 (10.1.11) 中令 $D_f = 0$, 再求解相应的线性矩阵不等式系统, 利用所得到的可行解, 根据 (10.1.13) 式构造所求的滤波器。然而, 由于减少了一个自由变量, 优化问题 (10.1.14) 的最优值可能具有一定的保守性。

由于滤波器存在条件 (10.1.11) 关于系统 (10.1.11) 的系数矩阵是凸的, 因此, 以上得到的关于线性时不变系统的 H_∞ 滤波器设计方法可以推广到一类不确定系统模型。

考虑一类由多胞形模型描述的不确定系统 (10.1.1), 其中的系数矩阵 A 、 B 、 C 、 D 不再是常数矩阵, 而是不确定的。定义矩阵

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

假定矩阵 T 属于某个给定的多胞形 D_c , 即对任意的 $T \in D_c$, 存在满足 $\lambda_1 + \dots + \lambda_q = 1$ 的非负常数 $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, 使得

$$T = \sum_{i=1}^q \lambda_i T_i \quad (10.1.15)$$

其中 T_i 是多胞形 D_c 的顶点。

这样的模型是相当一般的, 它可以包括实际中的许多不确定模型。例如当系统矩阵中只有某些元是不确定或依赖不确定参数时, 可以通过选取适当的顶点矩阵, 用一个多胞形模型来描述。多胞型模型描述可以更充分地利用不确定性的结构信息, 导出具有更小保守性的分析和综合结果。另外, 对于由范数有界不确定性描述模型, 即

$$T = T_0 + H\Delta E \quad (10.1.16)$$

其中 T_0 描述了系统的名义模型, Δ 是满足 $\Delta^T \Delta \leq I$ 的不确定矩阵。由于

$$\Delta^T \Delta \leq I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & \Delta \\ \Delta^T & I \end{bmatrix} \geq 0$$

及矩阵 T 是不确定矩阵 Δ 的一个仿射函数, 故对所有允许的不确定矩阵, 矩阵 T 的全体构成一个凸集。特别地, 当 Δ 是一个对角矩阵时, 这样的凸集就是多胞形。对于一般的

情况, 凸集总可以用一个内切的多胞形来近似, 且可以达到任意的精度。因此多胞型模型也可以覆盖用范数有界不确定性描述的不确定模型。但是, 一般情况下, 多胞型顶点数的增加往往会导致计算复杂性的增加。

对多胞型模型 (10.1.1), 假定多胞型 D_c 的顶点是

$$T_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, q$$

则以下定理给出了鲁棒 H_∞ 滤波器的存在条件和设计方法。

定理 10.1.3 对给定的常数 $\gamma > 0$, 不确定系统 (10.1.1) 存在一个 γ -次优的鲁棒 H_∞ 滤波器当且仅当存在对称矩阵 $R > 0$, $X > 0$ 和矩阵 M , N , Z , D_f , 使得矩阵不等式 (10.1.12) 和

$$\begin{bmatrix} RA_i + A_i^T R & RA_i + A_i^T X + C_i^T Z^T + M^T & RB_i & L^T - C_i^T D_f^T - N^T \\ * & A_i^T X + X A_i + C_i^T Z^T + Z C_i & X B_i + Z D_i & L^T - C_i^T D_f^T \\ * & * & -I & -D_i^T D_f^T \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10.1.17)$$

对所有的 $i=1, \dots, q$ 成立。进而, 如果对所有的 $i=1, \dots, q$, 矩阵不等式系统 (10.1.12) 和 (10.1.17) 有一个可行解, 则可以按 (10.1.13) 式构造不确定系统的 γ -次优的鲁棒 H_∞ 滤波器。

不确定系统的最优鲁棒 H_∞ 滤波器可以通过求解以下的优化问题得到:

$$\begin{aligned} & \min \rho \\ & \text{s.t.} \begin{bmatrix} RA_i + A_i^T R & RA_i + A_i^T X + C_i^T Z^T + M^T & RB_i & L^T - C_i^T D_f^T - N^T \\ * & A_i^T X + X A_i + C_i^T Z^T + Z C_i & X B_i + Z D_i & L^T - C_i^T D_f^T \\ * & * & -I & -D_i^T D_f^T \\ * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} < 0 \\ & \quad i=1, \dots, q \end{aligned} \quad (10.1.18)$$

$$X - R > 0$$

例 10.1.1 考虑以下系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1+\zeta \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.4545 \\ 0.9090 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= [0 \quad 100] x(t) + w(t) \\ z(t) &= [0 \quad 100] x(t) \end{aligned} \quad (10.1.19)$$

其中: 输入噪声信号假定是有界能量的, 不确定参数 ζ 假定满足 $|\zeta| \leq 0.3$ 。对系统 (10.1.19), 要求设计一个最优 H_∞ 滤波器。

对给定的不确定性描述, 可以得到描述多胞形模型的两个顶点矩阵:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1.3 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

通过求解优化问题 (10.1.18), 并根据定理 10.1.3, 可以得到系统 (10.1.19) 的最优 H_∞ 滤波器的系数矩阵是:

$$A_f = 10^5 \times \begin{bmatrix} -0.0000360 & -4.8691211 \\ 0.0000096 & -0.0527761 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 4869.13 \\ 52.7713 \end{bmatrix}$$

$$C_f = 10^{-2} \times [0.0001793 \quad 7.9572898], \quad D_f = 0.9992$$

相应的估计误差对输入噪声信号的抑制度是 $\gamma^* = 1.0000017$ 。从以上的数据可以看到, 所得到的滤波器具有高增益, 因此可能存在一些数值问题。为了避免这种现象, 可以选取一个充分小的常数 $\varepsilon > 0$, 用 $X - R \geq \varepsilon I$ 来替代 $X - R > 0$ 。特别地, 在这个例子中, 选取 $\varepsilon = 10^{-4}$, 求解相应的优化问题, 可以得到

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.0836 & -603.7963 \\ 0.9994 & -8.0292 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 6.0281 \\ 0.0753 \end{bmatrix}$$

$$C_f = 10^{-2} \times [0.0027 \quad 5.7695], \quad D_f = 0.9994$$

相应的 $\gamma^* = 1.0000893 = 7.7562 \times 10^{-4} \text{ dB}$ 。

10.2 H_2/H_∞ 滤波器设计

前一节讨论了 H_∞ 滤波器的设计方法, 假定的系统外部扰动和测量噪声是任意的有限能量信号。如果部分噪声信号的统计特性是可知的, 而另一部分是任意的有限能量信号, 则可以设计系统的 H_2/H_∞ 滤波器, 即在保证估计误差满足给定的扰动抑制度下, 使得估计误差的 H_2 范数最小化。本节针对线性离散时间系统, 采用线性矩阵不等式处理方法, 给出 H_2/H_∞ 滤波器的设计方法。

系统由以下模型描述:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w_1(k) + B_2 w_2(k), \quad x(0) = 0 \\ y(k) &= Cx(k) + D_1 w_1(k) + D_2 w_2(k) \\ z(k) &= Lx(k) \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

其中: $x(k) \in \mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $y(k) \in \mathbf{R}^r$ 是测量输出, $w_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 是噪声信号, $z(k) \in \mathbf{R}^p$ 是待估计的信号。假定 w_1 和 w_2 分别是白噪声信号和有界能量的噪声信号。

系统 (10.2.1) 假定是渐近稳定的, 则对给定的常数 $\gamma > 0$, 要求设计一个渐近稳定的满阶线性滤波器

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_f \hat{x}(k) + B_f y(k), \quad \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(k) &= C_f \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

使得

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(k) + \tilde{\mathbf{B}}_1\tilde{\mathbf{w}}_1(k) + \tilde{\mathbf{B}}_2\tilde{\mathbf{w}}_2(k), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{z}}(k) &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}\quad (10.2.3)$$

是渐近稳定的, 且对应于通道 $\mathbf{w}_1 \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ 的滤波误差方差 $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\tilde{\mathbf{z}}^T(t)\tilde{\mathbf{z}}(t)\}$ 的一个上界最小化, 对应于通道 $\mathbf{w}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{z}}$ 的滤波误差向量满足 $\|\tilde{\mathbf{z}}\|_2 < \gamma\|\mathbf{w}_2\|_2$ 。其中,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_f\mathbf{C} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_f\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_f\mathbf{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{L} \quad -\mathbf{C}_f], \quad \tilde{\mathbf{z}}(k) = \mathbf{z}(k) - \hat{\mathbf{z}}(k)\end{aligned}$$

由方差分析可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\tilde{\mathbf{z}}^T(t)\tilde{\mathbf{z}}(t)\} = \text{Trace}(\tilde{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{B}}_1)$, 其中矩阵 $\mathbf{P}_2 > \mathbf{0}$ 是以下 Lyapunov 矩阵方程的解:

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{P}_2 + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{0} \quad (10.2.4)$$

应用离散时间系统的有界实引理, 可得:

定理 10.2.1 对给定的常数 $\gamma > 0$, 矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 是渐近稳定的, 且 $\|\tilde{\mathbf{z}}\|_2 < \gamma\|\mathbf{w}_2\|_2$, 当且仅当存在对称正定矩阵 \mathbf{P}_∞ , 使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_\infty & * & * & * \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} & * & * \\ \mathbf{P}_\infty \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{P}_\infty \tilde{\mathbf{B}}_2 & \mathbf{P}_\infty & * \\ \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (10.2.5)$$

其中*是由矩阵的对称性得到的矩阵块。进而, 如果 \mathbf{P}_∞ 是矩阵不等式 (10.2.5) 的一个可行解, 则 $\mathbf{P}_2 \leq \mathbf{P}_\infty$, 其中 \mathbf{P}_2 是 Lyapunov 方程 (10.2.4) 的对称正定解。

证明 若 \mathbf{P}_∞ 是矩阵不等式 (10.2.5) 的一个可行解, 则由矩阵的 Schur 补性质可得

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{P}_\infty \tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{P}_\infty + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} \leq \mathbf{0}$$

由矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的渐近稳定性, 即可推出 $\mathbf{P}_2 \leq \mathbf{P}_\infty$ 。定理得证。

根据这一定理, 可以用 $\text{Trace}(\tilde{\mathbf{B}}_1^T \mathbf{P}_\infty \tilde{\mathbf{B}}_1)$ 作为估计误差 H_2 性能指标的上界, 通过求解在矩阵不等式 (10.2.5) 约束下使得该上界最小化的优化问题, 可得系统 (10.2.1) 的 H_2/H_∞ 滤波器。然而, 矩阵不等式 (10.2.5) 关于矩阵变量 \mathbf{P}_∞ 、 \mathbf{A}_f 、 \mathbf{B}_f 、 \mathbf{C}_f 是非线性的, 因此, 要直接求解这样一个非线性优化问题还是很困难的。以下采用 10.1 节中的方法, 通过适当的变量替换, 导出基于求解一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题的 H_2/H_∞ 滤波器设计方法。

类似于上一节的证明方法和 H_2 控制器的设计方法, 可得以下定理:

定理 10.2.2 对给定的常数 $\gamma > 0$, 系统 (10.2.1) 存在一个 H_2/H_∞ 滤波器 (10.2.2) 当且仅当以下的优化问题

$$\min_{R, X, Z, S, T, H} \text{Trace}(H) \quad (10.2.6)$$

$$\text{s.t. (i)} \quad \begin{bmatrix} R & * & * & * & * & * \\ R & X & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \gamma^2 I & * & * & * \\ RA & RA & RB_2 & R & * & * \\ XA + ZC + S & XA + ZC & XB_2 + ZD_2 & R & X & * \\ L - T & L & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (10.2.7)$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} H & * & * \\ RB_1 & R & * \\ XB_1 + ZD_1 & R & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (10.2.8)$$

进而, 若优化问题 (10.2.6) 有最优解 R, X, S, Z, T, H , 则

$$A_f = (R - X)^{-1} S, \quad B_f = (R - X)^{-1} Z, \quad C_f = T \quad (10.2.9)$$

是所要求的 H_2/H_∞ 滤波器 (10.2.2) 的系数矩阵, 相应的 $\lim_{t \rightarrow \infty} E\{\tilde{z}^T(t)\tilde{z}(t)\} \leq \text{Trace}(H)$ 。

由于优化问题 (10.2.6) 是一个具有线性矩阵不等式约束和线性目标函数的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。

另一方面, 由于不等式 (10.2.7) ~ (10.2.8) 关于系统 (10.2.1) 中的系数矩阵是仿射依赖的, 故类似于上一节的讨论, 可以将定理 10.2.2 的结论推广到具有多胞型模型描述的参数不确定系统, 通过求解以所有角点处的不等式 (10.2.7) ~ (10.2.8) 为约束条件的优化问题 (10.2.6), 根据 (10.2.9) 式可得相应不确定系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器。以下通过一个例子来说明这一结论。

例 10.2.1 考虑不确定系统 (10.2.1), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 1.2 - \alpha & -0.5 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.35 \end{bmatrix} \\ C = [0.35 + \beta \quad -0.65], \quad D_1 = 1.3, \quad D_2 = 0.4, \quad L = [0.2 \quad 0]$$

α 和 β 是系统模型中的两个不确定参数, 它们的变化范围为:

$$0 \leq \alpha \leq 0.5, \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

对名义系统 (即 $\alpha = \beta = 0$) 和给定的常数 $\gamma = 0.3$, 根据定理 10.2.2, 可得该名义系统的 H_2/H_∞ 滤波器:

$$\hat{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.0267 & -0.7504 \\ 0.9063 & 0.0455 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} -0.0764 \\ 0.8393 \end{bmatrix} y(k) \\ \hat{z}(k) = [0.2 \quad 0] \hat{x}(k)$$

相应的 $\text{Trace}(H) = 0.002$ 。计算得到实际误差动态系统的 H_2 性能指标是 0.0011。

对给定的 $\gamma = 2$, 通过列出 4 个角点处的系统模型系数矩阵和具有这些系数矩阵的不等式 (10.2.7) ~ (10.2.8), 求解相应的优化问题, 可得具有不确定参数 α 和 β 的系统鲁

棒 H_2/H_∞ 滤波器:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.1918 & -0.6567 \\ 0.4995 & 0.0187 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.2090 \\ 0.8262 \end{bmatrix} y(k) \\ \hat{z}(k) &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k)\end{aligned}$$

相应的 $\text{Trace}(\mathbf{H}) = 0.1695$ 。

进一步计算可得, 对具有以上鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器的动态误差系统, $w_1 \rightarrow \tilde{z}$ 的传递函数在不确定参数区域 4 个角点处的 H_2 性能指标分别是 0.0871、0.0707、0.0037 和 0.0321, 这表明了 $\text{Trace}(\mathbf{H}) = 0.1695$ 是不确定动态误差系统 H_2 性能指标的一个上界。

第 11 章 大系统的分散控制

由于系统空间上的大型化、结构上的复杂化等因素，在工程技术、社会经济和生态生物等领域中出现了大规模系统，例如电力系统、化工过程、大型空间结构、计算机通信网络等。对于这些大型系统，集中控制将使得整个控制系统信息交换异常复杂，从而导致系统集成和运行成本提高，系统的可靠性降低。从系统的实时性、可靠性和经济性等方面考虑，20 世纪 70 年代出现了处理复杂关联大系统控制问题的分散控制方法。分散控制是指利用组成大系统的各局部子系统信息构成若干局部控制器，以实现对整个大系统的控制。近年来，大系统的分散控制方法受到了人们的广泛重视，提出了许多有效的分散控制系统设计方法，并在一些实际系统中取得了成功应用。

本章通过给出一类关联时滞系统的分散稳定化控制器设计和一类关联系统分散保性能控制器设计，介绍了基于线性矩阵不等式的大系统分散控制器的设计方法。

11.1 时滞系统的分散稳定化控制

在关联系统中，子系统间的信息传输往往存在时间滞后。因此，研究具有滞后关联动态大系统的分散镇定问题是非常必要的。本节将研究分散稳定化状态反馈控制问题，提出基于求解一个线性矩阵不等式问题的稳定化控制器设计方法。

考虑由 N 个关联子系统 $S_i, i=1, 2, \dots, N$ 复合而成的关联系统

$$S_i: \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k-h_{ij}) \quad (11.1.1)$$

其中： $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbf{R}^{n_i}, \mathbf{u}_i(k) \in \mathbf{R}^{m_i}$ 分别是子系统 S_i 的状态和控制向量， $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ 和 \mathbf{A}_{ij} 是具有适当维数的实常数矩阵， $h_{ij} \geq 0$ 表示关联项中的滞后时间。

假定各个子系统的状态都是可以直接测量得到的，则我们的目的是对每一个子系统设计一个局部无记忆状态反馈控制律

$$\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_i(k) \quad (11.1.2)$$

其中的 $\mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i}$ 表示局部反馈增益矩阵，使得所导出的闭环复合系统

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{ci} \mathbf{x}_i(k) + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k-h_{ij}), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (11.1.3)$$

是稳定的，其中的 $\mathbf{A}_{ci} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{F}_i$ 。若这样的控制律 (11.1.2) 存在，则称系统 (11.1.1) 是分散能镇定的，相应的控制律 (11.1.2) 是系统 (11.1.1) 的一个分散稳定化控制律。

以下定理给出了系统 (11.1.1) 分散能镇定的一个条件。

定理 11.1.1 对系统 (11.1.1), 如果对所有的 $i=1, 2, \dots, N$, 存在矩阵 $F_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i}$ 和对称正定矩阵 $P_i, R_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & A_i + B_i F_i & A_{i1} & \cdots & A_{iN} \\ A_i^T + F_i^T B_i^T & -P_i + \delta_i R_i & 0 & \cdots & 0 \\ A_{i1}^T & 0 & -\delta(A_{i1}) R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^T & 0 & 0 & \cdots & -\delta(A_{iN}) R_N \end{bmatrix} < 0 \quad (11.1.4)$$

则系统 (11.1.1) 是分散能镇定的, 且具有以上矩阵 F_i 作为局部反馈增益矩阵的状态反馈控制律 (11.1.2) 是系统 (11.1.1) 的一个分散稳定化控制律。其中 $\delta(\cdot)$ 是一个两值函数,

$\delta(0) = 0$, 对 $E \neq 0$, $\delta(E) = 1$, $\delta_i = \sum_{j=1}^N \delta(A_{ji})$ 。

证明 在定理条件下, 取 $u_i(k) = F_i x_i(k)$, 则相应的闭环复合系统是 (11.1.3)。考虑以下的 Lyapunov 泛函

$$V(x_k) = \sum_{i=1}^N \left[x_i^T(k) P_i x_i(k) + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \delta(A_{ij}) x_j^T(k - h_{jl}) R_j x_j(k - h_{jl}) \right] \quad (11.1.5)$$

沿系统 (11.1.3) 的任意轨线,

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k) &= V(x_{k+1}) - V(x_k) \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ [A_{ci} x_i(k) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(k - h_{ij})]^T P_i [A_{ci} x_i(k) + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j(k - h_{ij})] \right. \\ &\quad \left. - x_i^T(k) P_i x_i(k) + \sum_{j=1}^N \delta(A_{ij}) x_j^T(k) R_j x_j(k) - \sum_{j=1}^N \delta(A_{ij}) x_j^T(k - h_{ij}) R_j x_j(k - h_{ij}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ x_i^T(k) (A_{ci}^T P_i A_{ci} - P_i + \delta_i R_i) x_i(k) + \sum_{j=1}^N 2 x_i^T(k) A_{ci}^T P_i A_{ij} x_j(k - h_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N x_j^T(k - h_{ij}) A_{ij}^T P_i A_{ij} x_j(k - h_{ij}) - \sum_{j=1}^N \delta(A_{ij}) x_j^T(k - h_{ij}) R_j x_j(k - h_{ij}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i(k) \\ x_1(k - h_{i1}) \\ \vdots \\ x_N(k - h_{iN}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{ci}^T P_i A_{ci} - P_i + \delta_i R_i & A_{ci}^T P_i A_{i1} & \cdots & A_{ci}^T P_i A_{iN} \\ A_{i1}^T P_i A_{ci} & A_{i1}^T P_i A_{i1} - \delta(A_{i1}) R_1 & \cdots & A_{i1}^T P_i A_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^T P_i A_{ci} & A_{iN}^T P_i A_{i1} & \cdots & A_{iN}^T P_i A_{iN} - \delta(A_{iN}) R_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ x_1(k - h_{i1}) \\ \vdots \\ x_N(k - h_{iN}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此, 如果

$$\begin{bmatrix} A_{ci}^T P_i A_{ci} - P_i + \delta_i R_i & A_{ci}^T P_i A_{i1} & \cdots & A_{ci}^T P_i A_{iN} \\ A_{i1}^T P_i A_{ci} & A_{i1}^T P_i A_{i1} - \delta(A_{i1}) R_1 & \cdots & A_{i1}^T P_i A_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{iN}^T P_i A_{ci} & A_{iN}^T P_i A_{i1} & \cdots & A_{iN}^T P_i A_{iN} - \delta(A_{iN}) R_N \end{bmatrix} < 0 \quad (11.1.6)$$

则闭环系统 (11.1.3) 是稳定的。而 (11.1.6) 式可进一步写成

$$\begin{aligned} & [A_{ci} \ A_{i1} \ \cdots \ A_{iN}]^T P_i [A_{ci} \ A_{i1} \ \cdots \ A_{iN}] \\ & + \begin{bmatrix} -P_i + \delta_i R_i & & & & \\ & -\delta(A_{i1})R_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\delta(A_{iN})R_N & \\ & & & & \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (11.1.7)$$

由矩阵的 Schur 补性质, 矩阵不等式 (11.1.7) 成立当且仅当 (11.1.4) 式成立。证毕。

根据定理 11.1.1 得到的分散能镇定条件, 我们提出系统 (11.1.1) 的分散稳定化控制器设计方法。

定理 11.1.2 对系统 (11.1.1), 如果对所有 $i=1, 2, \dots, N$, 存在对称正定矩阵 Q_i 和 S_i , 矩阵 Y_i , 使得

$$\begin{bmatrix} -Q_i & A_i Q_i + B_i Y_i & A_{i1} Q_1 & \cdots & A_{iN} Q_N \\ Q_i A_i^T + Y_i^T B_i^T & -Q_i - \delta_i S_i & 0 & \cdots & 0 \\ Q_1 A_{i1}^T & 0 & -\delta(A_{i1})S_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_N A_{iN}^T & 0 & 0 & \cdots & -\delta(A_{iN})S_N \end{bmatrix} < 0 \quad (11.1.8)$$

则系统 (11.1.1) 是分散能镇定的, 且

$$u_i = Y_i Q_i^{-1} x_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

是系统 (11.1.1) 的一个分散稳定化控制律。

证明 根据定理 11.1.1, 对 (11.1.4) 式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} I & & & & \\ & P_1^{-1} & & & \\ & & P_1^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P_N^{-1} \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & A_i P_i^{-1} + B_i F_i P_i^{-1} & A_{i1} P_1^{-1} & \cdots & A_{iN} P_N^{-1} \\ P_i^{-1} A_i^T + P_i^{-1} F_i^T B_i^T & -P_i^{-1} + \delta_i P_i^{-1} R_i P_i^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ P_1^{-1} A_{i1}^T & 0 & -\delta(A_{i1})P_1^{-1} R_1 P_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_N^{-1} A_{iN}^T & 0 & 0 & \cdots & -\delta(A_{iN})P_N^{-1} R_N P_N^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

记 $Q_i = P_i^{-1}$, $Y_i = F_i P_i^{-1}$, $S_i = P_i^{-1} R_i P_i^{-1}$, 由上式即可得证本定理的结论。

定理 11.1.2 给出的分散控制器保证了闭环系统的渐近稳定性, 但未必能保证其具有良好的动态性能。以下定理给出了闭环系统状态具有给定衰减度 α 的分散控制器设计方法,

即对所有的 $i=1, 2, \dots, N$, $\|x_i(k)\| < \gamma_i |\alpha|^k$, 其中 γ_i 是确定的常数, α ($0 < \alpha < 1$) 是由设计者给定的参数, 反映了闭环系统状态的衰减率。

定理 11.1.3 对给定的常数 α ($0 < \alpha < 1$) 和系统 (11.1.1), 如果存在对称正定矩阵 Q_i 和 S_i , 矩阵 Y_i , 使得对所有的 $i=1, 2, \dots, N$, 以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -Q_i & \alpha^{-1}A_iQ_i + \alpha^{-1}B_iY_i & \alpha^{-h_{i1}-1}A_{i1}Q_i & \dots & \alpha^{-h_{iN}-1}A_{iN}Q_i \\ \alpha^{-1}Q_iA_i^T + \alpha^{-1}Y_i^TB_i^T & -Q_i + \delta_iS_i & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^{-h_{i1}-1}Q_iA_{i1}^T & 0 & -\delta_i(A_{i1})S_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{-h_{iN}-1}Q_iA_{iN}^T & 0 & 0 & \dots & -\delta_i(A_{iN})S_i \end{bmatrix} < 0 \quad (11.1.9)$$

则分散控制律

$$u_i = Y_i Q_i^{-1} x_i, \quad i=1, 2, \dots, N$$

将保证闭环系统的状态具有给定的衰减度 α 。

证明 事实上, 在闭环系统 (11.1.3) 中取变换 $x_i(k) = \alpha^k \bar{x}_i(k)$, 并利用定理 11.1.1 和 11.1.2 的结论即可得证本定理。

矩阵不等式 (11.1.8) 和 (11.1.9) 是两个关于矩阵变量 Q_i 、 Y_i 和 S_i 的线性矩阵不等式, 因此, 应用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 可方便地求解矩阵不等式 (11.1.8) 和 (11.1.9)。进而, 从所得到的可行解 Q_i 、 Y_i 和 S_i , 根据 $F_i = Y_i Q_i^{-1}$ 和 (11.1.2) 式, 分别可得所需要的分散稳定化控制律和具有给定衰减度的分散稳定化控制律。

如果矩阵不等式 (11.1.8) 和 (11.1.9) 有解, 则它们的可行解的全体分别构成了一个凸集, 因此, 定理 11.1.2 和 11.1.3 给出了一组分散稳定化控制器。利用这一性质, 可以在这一组控制器中设计满足其他性能要求的分散稳定化控制律。

在控制器实现中, 需要考虑控制的能量和执行器的饱和特性, 因此, 具有较小反馈增益参数的控制律往往是更有意义的。以下探讨具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律的设计方法。

考虑

$$Y_i^T Y_i < \alpha_i I, \quad Q_i^{-1} < \beta_i I \quad (11.1.10)$$

其中: $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$ 。由于 $F_i = Y_i Q_i^{-1}$, 则

$$F_i^T F_i = Q_i^{-1} Y_i^T Y_i Q_i^{-1} < \alpha_i \beta_i^2 I$$

因此, 可以通过使得 α_i 、 β_i 的极小化来保证分散稳定化控制律具有较小的反馈增益参数。

引理 11.1.1 (1) $Y_i^T Y_i < \alpha_i I$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} -\alpha_i I & Y_i^T \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (11.1.11)$$

(2) $Q_i^{-1} < \beta_i I$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} Q_i & I \\ I & \beta_i I \end{bmatrix} > 0 \quad (11.1.12)$$

证明 由矩阵的初等运算即可证之。

容易看到矩阵不等式 (11.1.11) 和 (11.1.12) 分别关于变量 Y_i 和 α_i 、 Q_i 和 β_i 是仿射线性的，故是相关变量的线性矩阵不等式。

由以上讨论，建立一个优化问题：

$$\min \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i + \sum_{i=1}^N \beta_i \right) \quad (11.1.13)$$

s. t. (11.1.8) 或 (11.1.9)

(11.1.11), (11.1.12)

这是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题，因此，可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解之。根据定理 11.1.2 和 11.1.3，利用问题 (11.1.13) 的最优解可以构造系统 (11.1.1) 的一个具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律或具有给定衰减度的分散稳定化控制律。

以上的优化问题提供了一个设计分散稳定化控制律的系统化方法。

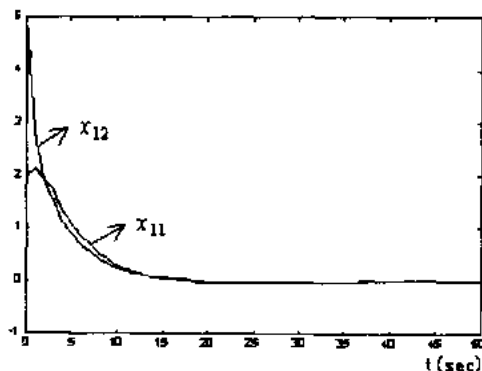
例 11.1.1 考虑由以下 3 个子系统复合的关联系统，

$$\begin{aligned} S_1: \quad x_1(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} x_1(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_1(k) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x_2(k-h_{12}) \\ S_2: \quad x_2(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & -0.5 \\ -0.1 & -1 & -0.1 \\ -0.6 & 1 & 0.8 \end{bmatrix} x_2(k) + \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} u_2(k) \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} x_1(k-h_{21}) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} x_3(k-h_{23}) \\ S_3: \quad x_3(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ -0.1 & 0.8 \end{bmatrix} x_3(k) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} u_3(k) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix} x_1(k-h_{31}) \end{aligned}$$

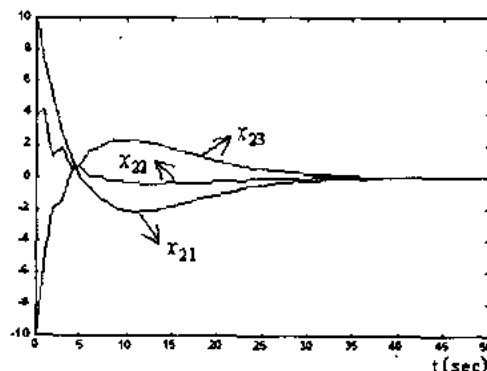
其中： $x_1 = [x_{11}, x_{12}]^T \in \mathbf{R}^2$ 、 $x_2 = [x_{21}, x_{22}, x_{23}]^T \in \mathbf{R}^3$ 和 $x_3 = [x_{31}, x_{32}]^T \in \mathbf{R}^2$ 分别是 3 个子系统的状态。首先设计稳定化的分散控制律。为此，求解具有约束条件 (11.1.8)、(11.1.11) 和 (11.1.12) 的优化问题 (11.1.13)，应用求解器 mincx 可得该问题是可解的，故该系统是分散能镇定的，且由增益矩阵

$$\begin{aligned} F_1 &= [-2.9007 \quad -3.7773] \\ F_2 &= \begin{bmatrix} -0.6517 & 2.3554 & 0.7495 \\ 1.5870 & -0.8407 & -1.6875 \end{bmatrix} \\ F_3 &= \begin{bmatrix} -1.9650 & 0.0076 \\ 0.0780 & -1.6010 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

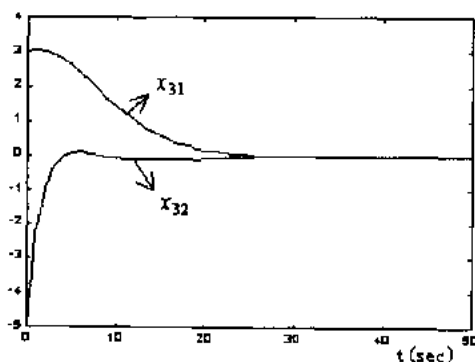
所构成的控制律 (11.1.2) 是该系统的一个分散稳定化控制律。考虑 $h_{12} = h_{21} = h_{23} = h_{31} = 0$, 初始条件 $x_1(0) = [2 \ 5]^T$, $x_2(0) = [10 \ 4 \ -10]^T$, $x_3(0) = [3 \ -5]^T$, 则相应的闭环系统状态轨线如图 11.1 所示。



(a) 第 1 个子系统的状态相应曲线



(b) 第 2 个子系统的状态相应曲线



(c) 第 3 个子系统的状态相应曲线

图 11.1 稳定闭环系统的状态轨线

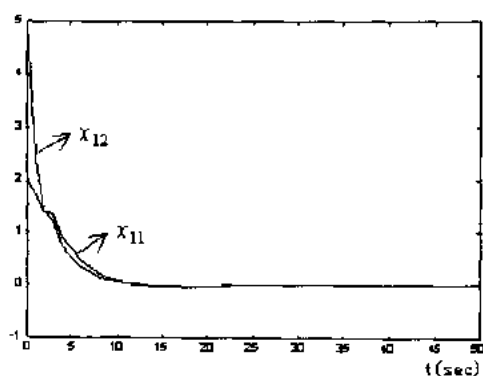
如果要求系统的状态具有更快的衰减速度, 考虑取衰减度 $\alpha = 0.9$, $h_{12} = h_{21} = h_{23} = h_{31} = 0$, 应用求解器 mincx 求解具有约束条件 (11.1.9)、(11.1.11) 和 (11.1.12) 的优化问题 (11.1.13), 即可得相应的解。根据定理 11.1.3, 由增益矩阵

$$F_1 = \begin{bmatrix} -3.4307 & -4.3537 \end{bmatrix}$$

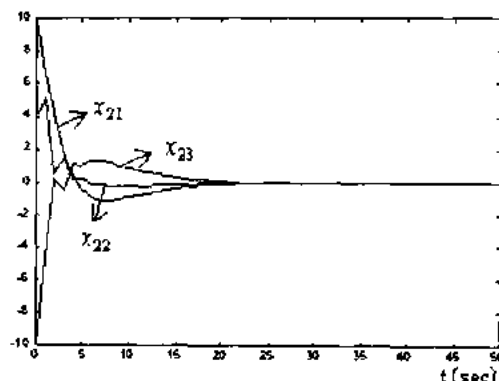
$$F_2 = \begin{bmatrix} -1.0552 & 3.5565 & 1.3849 \\ 2.0131 & -0.9656 & -2.1251 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -2.9531 & 0.0070 \\ 0.0825 & -2.6227 \end{bmatrix}$$

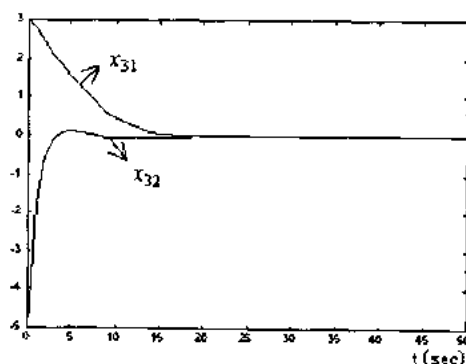
所构成的控制律 (11.1.2) 将保证闭环系统状态具有给定的衰减度 $\alpha = 0.9$ 。在同样的初始条件下, 相应的闭环系统状态轨线如图 11.2 所示。



(a) 第 1 个子系统的状态相应曲线



(b) 第 2 个子系统的状态相应曲线



(c) 第 3 个子系统的状态相应曲线

图 11.2 具有给定稳定度的闭环系统状态轨线

比较图 11.1 和图 11.2, 可以看出具有给定稳定度的闭环系统有更好的过渡过程。

11.2 离散关联系统的分散保性能控制

前一节研究了关联系统的分散镇定问题。本节将进一步结合系统的一个二次型性能指标, 研究关联系统的分散保性能控制问题。

11.2.1 保性能分析

考虑由以下 N 个子系统关联的系统:

$$x_i(k+1) = (A_i + \Delta A_i)x_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11.2.1)$$

其中: $x_i(k) \in \mathbf{R}^{n_i}$ 是第 i 个子系统的状态, A_i 和 G_{ij} 是适当维数的实数矩阵, $g_{ij}(x_j) \in \mathbf{R}^{l_{ij}}$ 是未知的非线性向量值函数, 反映了第 i 个子系统和第 j 个子系统之间的关联, ΔA_i 和

ΔG_{ij} 是反映模型中参数不确定性的未知矩阵。对 $i, j = 1, 2, \dots, N$, 不确定参数矩阵 ΔA_i 和 ΔG_{ij} 假定是范数有界的, 且具有以下形式:

$$\Delta A_i = H_i F_i E_i, \quad \Delta G_{ij} = L_{ij} F_{ij} N_{ij} \quad (11.2.2)$$

其中: $F_i \in \mathbf{R}^{\alpha_i \times \beta_i}$ 和 $F_{ij} \in \mathbf{R}^{\alpha_{ij} \times \beta_{ij}}$ 分别是满足 $F_i^T F_i \leq I_{\beta_i}$ 和 $F_{ij}^T F_{ij} \leq I_{\beta_{ij}}$ 的未知矩阵, I_k 表示 $k \times k$ 阶的单位矩阵, H_i 、 E_i 、 L_{ij} 和 N_{ij} 是已知的适当维数的实数矩阵, 描述了不确定参数的结构。

考虑二次型性能指标

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} x_i^T(k) Q_i x_i(k) \quad (11.2.3)$$

其中: $Q_i = Q_i^T > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, 是给定的加权矩阵。

在以下的讨论中, 对系统 (11.2.1) 中的未知关联作以下假定:

假定 11.2.1 存在实常数矩阵 W_{ij} , 使得对所有的 $x_j \in \mathbf{R}^{n_j}$,

$$\|g_{ij}(x_j)\| \leq \|W_{ij} x_j\|, \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

定义 11.2.1 对关联系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3), 如果对所有非零的状态向量 $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 和所有允许的不确定性及相关, 对称正定矩阵组 $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 满足

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \{[(A_i + \Delta A_i)x_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j)]^T P_i [(A_i + \Delta A_i)x_i(k) \\ & + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j)] - x_i^T(k) P_i x_i(k) + x_i^T(k) Q_i x_i(k)\} < 0 \end{aligned} \quad (11.2.4)$$

则 $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 称为是系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 的一组二次型性能矩阵。

以下结论揭示了二次型性能矩阵的性质。

定理 11.2.1 假定系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 存在一组二次型性能矩阵 $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$, 则对所有允许的参数不确定性和关联, 不确定关联系统 (11.2.1) 是渐近稳定的, 且系统的性能指标值满足

$$J \leq \sum_{i=1}^N x_i^T(0) P_i x_i(0) \quad (11.2.5)$$

其中: $x_i(0)$ 是第 i 个子系统的初始状态, $i = 1, 2, \dots, N$ 。

证明 设 $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ 是系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 的一组二次型性能矩阵, 则根据定义, 不等式 (11.2.4) 对所有非零向量 $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 、所有允许的不确定性和关联成立。定义 Lyapunov 函数

$$V(k) = \sum_{i=1}^N x_i^T(k) P_i x_i(k)$$

利用不等式 (11.2.4), Lyapunov 函数沿系统 (11.2.1) 的任意轨线的一阶向前差分

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < -\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i(k) < 0 \quad (11.2.6)$$

因此, 系统 (11.2.1) 是渐近稳定的。

进而, 从 (11.2.6) 式可得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T(k) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}_i(k) < -\Delta V(k)$$

在上式两边将 k 从 0 到 ∞ 求和, 并利用系统的渐近稳定性, 可得

$$J \leq V(0) = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^T(0) \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i(0)$$

定理得证。

定理 11.2.1 中给出的性能指标上界 (11.2.5) 依赖于系统的初始状态 $\mathbf{x}_i(0)$ 。在实际中往往难以得到系统初始状态的精确信息, 因此希望得到一个不依赖系统初始状态精确信息的性能指标上界。为此, 假定第 i 个子系统的初始状态在一个有界区域 Ω_i 中, $\Omega_i = \{\mathbf{x}_i(0) \in \mathbf{R}^{n_i} : \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{U}_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \leq 1\}$, \mathbf{U}_i 是一个已知常数矩阵。则从 (11.2.5) 式可得

$$J \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(\mathbf{U}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{U}_i) \quad (11.2.7)$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵 (\cdot) 的最大特征值。

在本节主要结论的导出中需要用到以下引理。

引理 11.2.1 对给定的适当维数实矩阵 \mathbf{H} 和 \mathbf{E} , 以及所有满足 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I}$ 的矩阵 $\mathbf{F} = \text{diag}\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_l\}$, 矩阵不等式

$$\mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{E} + \mathbf{E}^T \mathbf{F}^T \mathbf{H}^T \leq \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}^T + \mathbf{E}^T \mathbf{\Gamma}_e^{-1} \mathbf{E}$$

成立。其中 $\mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$, $\mathbf{\Gamma}_h = \text{diag}\{\gamma_1 \mathbf{I}_{h_1}, \gamma_2 \mathbf{I}_{h_2}, \dots, \gamma_l \mathbf{I}_{h_l}\}$, $\mathbf{\Gamma}_e = \text{diag}\{\gamma_1 \mathbf{I}_{e_1}, \gamma_2 \mathbf{I}_{e_2}, \dots, \gamma_l \mathbf{I}_{e_l}\}$, $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ 是一组正标量。

证明 引理结论可以由以下关系推出:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{H} \mathbf{F} \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{F}^T \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}^T + \mathbf{E}^T \mathbf{\Gamma}_e^{-1} \mathbf{E} \\ & \geq -\mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_h^{1/2} \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_e^{1/2} \mathbf{E} - \mathbf{E}^T \mathbf{\Gamma}_e^{-1/2} \mathbf{F}^T \mathbf{\Gamma}_h^{1/2} \mathbf{H}^T + \mathbf{H} \mathbf{\Gamma}_h \mathbf{H}^T + \mathbf{E}^T \mathbf{\Gamma}_e^{-1/2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_e^{-1/2} \mathbf{E} \\ & = (\mathbf{\Gamma}_h^{1/2} \mathbf{H}^T - \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_e^{-1/2} \mathbf{E})^T (\mathbf{\Gamma}_h^{1/2} \mathbf{H}^T - \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_e^{-1/2} \mathbf{E}) \geq 0 \end{aligned}$$

以下定理提供了系统 (11.2.1) 存在一组二次型性能矩阵的充分条件。

定理 11.2.2 对系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3), 如果对 $i=1, 2, \dots, N$, 存在对称正定矩阵 \mathbf{P}_i 和一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_j, j=1, 2, \dots, N$, 使得

$$\begin{bmatrix} -V_i + \varepsilon_i H_i H_i^T & A_i V_i & G_i & 0 & L_i & 0 \\ V_i A_i^T & -V_i & 0 & V_i E_i^T & 0 & V_i \tilde{Q}_i^T \\ G_i^T & 0 & -I + N_i^T \Gamma_{\beta} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_i V_i & 0 & -\varepsilon_i I & 0 & 0 \\ L_i^T & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{\alpha} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i V_i & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.8)$$

其中: $\tilde{Q}_i^T \tilde{Q}_i = \bar{Q}_i = Q_i + \sum_{j=1}^N W_j^T W_j$,

$$G_i = [G_{i1} \quad G_{i2} \quad \cdots \quad G_{iN}]$$

$$L_i = [L_{i1} \quad L_{i2} \quad \cdots \quad L_{iN}]$$

$$N_i = \text{diag}\{N_{i1}, N_{i2}, \cdots, N_{iN}\}$$

$$\Gamma_{\alpha} = \text{diag}\{\gamma_{i1} I_{\alpha_1}, \gamma_{i2} I_{\alpha_2}, \cdots, \gamma_{iN} I_{\alpha_N}\}$$

$$\Gamma_{\beta} = \text{diag}\{\gamma_{i1} I_{\beta_1}, \gamma_{i2} I_{\beta_2}, \cdots, \gamma_{iN} I_{\beta_N}\}$$

进而, 若以上条件成立, 则 $P_i = V_i^{-1}, i=1, 2, \cdots, N$, 是系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 的一组二次型性能矩阵。

证明 若存在对称正定矩阵 V_i 和一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_j, j=1, 2, \cdots, N$, 使得矩阵不等式 (11.2.8) 成立, 定义 $P_i = V_i^{-1}, i=1, 2, \cdots, N$, 我们将证明对称正定矩阵组 P_1, P_2, \cdots, P_N 是系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 的一组二次型性能矩阵。

定义

$$\begin{aligned} z = & \sum_{i=1}^N \{ [\bar{A}_i x_i(k) + \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} g_j(x_j)]^T P_i [\bar{A}_i x_i(k) + \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij} g_j(x_j)] - x_i^T(k) P_i x_i(k) \\ & + x_i^T(k) Q_i x_i(k) + \sum_{j=1}^N [W_{ij} x_j(k)]^T [W_{ij} x_j(k)] - \sum_{j=1}^N g_j^T(x_j) g_j(x_j) \} \end{aligned}$$

其中: $\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i, \bar{G}_{ij} = G_{ij} + \Delta G_{ij}$ 。利用

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j^T(k) W_{ij}^T W_{ij} x_j(k) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i^T(k) W_{ji}^T W_{ji} x_i(k)$$

容易证明

$$z = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \bar{g}_i(x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - P_i + \bar{Q}_i & \bar{A}_i^T P_i \bar{G}_i \\ \bar{G}_i^T P_i \bar{A}_i & \bar{G}_i^T P_i \bar{G}_i - I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \bar{g}_i(x) \end{bmatrix}$$

其中: $\bar{G}_i = [\bar{G}_{i1} \quad \bar{G}_{i2} \quad \cdots \quad \bar{G}_{iN}]$, $\bar{g}_i(x) = [g_{i1}^T(x_1), g_{i2}^T(x_2), \cdots, g_{iN}^T(x_N)]^T$ 。

考虑以下的矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i^T P_i \bar{A}_i - P_i + \bar{Q}_i & \bar{A}_i^T P_i \bar{G}_i \\ \bar{G}_i^T P_i \bar{A}_i & \bar{G}_i^T P_i \bar{G}_i - I \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.9)$$

该矩阵不等式可以进一步写成

$$\begin{bmatrix} -P_i + \bar{Q}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_i^\top \\ \bar{G}_i^\top \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} \bar{A}_i & \bar{G}_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 以上的矩阵不等式等价于

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & \bar{A}_i & \bar{G}_i \\ \bar{A}_i^\top & -P_i + \bar{Q}_i & \mathbf{0} \\ \bar{G}_i^\top & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (11.2.10)$$

将矩阵 \bar{A}_i 和 \bar{G}_i 的表示式代入矩阵不等式 (11.2.10), 并重新组织可得

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & A_i & G_i \\ A_i^\top & -P_i + \bar{Q}_i & \mathbf{0} \\ G_i^\top & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} F_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top F_i^\top \begin{bmatrix} H_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top \\ + \begin{bmatrix} L_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{F}_i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i \end{bmatrix}^\top \bar{F}_i^\top \begin{bmatrix} L_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top < \mathbf{0} \quad (11.2.11)$$

其中 $\bar{F}_i = \text{diag}\{F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{iN}\}$ 。根据引理 11.2.1, 矩阵不等式 (11.2.11) 对所有允许的不确定性成立的一个充分条件是存在一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_{ij}, j=1, 2, \dots, N$, 使得

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} & A_i & G_i \\ A_i^\top & -P_i + \bar{Q}_i & \mathbf{0} \\ G_i^\top & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} + \varepsilon_i \begin{bmatrix} H_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top + \varepsilon_i^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{0} & E_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} L_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Gamma_{\alpha}^{-1} \begin{bmatrix} L_i \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i \end{bmatrix}^\top \Gamma_{\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & N_i \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (11.2.12)$$

对以上不等式应用矩阵的 Schur 补性质, 得上式等价于

$$\begin{bmatrix} -P_i^{-1} + \varepsilon_i H_i H_i^\top & A_i & G_i & \mathbf{0} & L_i \\ A_i^\top & -P_i + \bar{Q}_i & \mathbf{0} & E_i^\top & \mathbf{0} \\ G_i^\top & \mathbf{0} & -I + N_i^\top \Gamma_{\beta} N_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_i & \mathbf{0} & -\varepsilon_i I & \mathbf{0} \\ L_i^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\Gamma_{\alpha} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (11.2.13)$$

对上式左边的矩阵分别左乘和右乘矩阵 $\text{diag}\{I, P_i^{-1}, I, I, I\}$, 并再一次应用矩阵的 Schur 补性质, 可得矩阵不等式 (11.2.13) 等价于矩阵不等式 (11.2.8)。由此可得, 从矩阵不等式 (11.2.8) 可推出 $z < 0$ 。

从假定 11.2.1 可得:

$$\sum_{j=1}^N [W_{ij} x_j(k)]^T [W_{ij} x_j(k)] - \sum_{j=1}^N g_{ij}^T(x_j) g_{ij}(x_j) \geq 0$$

由此及不等式 $z < 0$ 可推出矩阵不等式 (11.2.4) 对矩阵组 $P_i = V_i^{-1}$, $i=1, 2, \dots, N$ 是成立的。根据定义 11.2.1, 对称正定矩阵组 (P_1, P_2, \dots, P_N) 是系统 (11.2.1) 和性能指标 (11.2.3) 的一组二次型性能矩阵。定理得证。

矩阵不等式 (11.2.8) 是关于变量组 $V_i, \varepsilon_i, \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iN}$ 的一个线性矩阵不等式, 因此, 系统 (11.2.1) 的二次型性能矩阵的存在性问题转化成了一个线性矩阵不等式系统的可行性问题, 而后者可以用 LMI 工具箱中的求解器 feasp 来进行求解。

根据定理 11.2.1 和 11.2.2, 如果对 $i=1, 2, \dots, N$, 存在一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{iN}$ 和对称正定矩阵 V_i , 使得矩阵不等式 (11.2.8) 成立, 则系统 (11.2.1) 是渐近稳定的, 且相应的性能指标 (11.2.3) 的值满足

$$J \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(U_i^T V_i^{-1} U_i) \quad (11.2.14)$$

11.2.1 分散保性能控制器设计

基于上一小节给出的关联系统保性能分析结果, 这里将讨论分散保性能控制器的设计方法。

考虑由 N 个子系统关联起来的大系统:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= (A_i + \Delta A_i)x_i(k) + (B_i + \Delta B_i)u_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j), \\ y_i(k) &= (C_i + \Delta C_i)x_i(k) + (D_i + \Delta D_i)u_i(k), \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (11.2.15)$$

其中: $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 、 $u_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 和 $y_i(k) \in \mathbb{R}^{q_i}$ 分别是第 i 个子系统的状态向量、控制输入和测量输出, A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 和 G_{ij} 是已知的常数矩阵, $g_{ij}(x_j) \in \mathbb{R}^{l_{ij}}$ 是未知的向量值函数, 表示第 i 个子系统和第 j 个子系统之间的关联, 且假定满足上一小节给出的假定 11.2.1, ΔA_i 、 ΔB_i 、 ΔC_i 、 ΔD_i 和 ΔG_{ij} 是表示系统模型中参数不确定性的未知矩阵, 且假定其是范数有界的, 并具有以下形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_i \\ \Delta C_i & \Delta D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1i} \\ H_{2i} \end{bmatrix} F_i \begin{bmatrix} E_{1i} & E_{2i} \end{bmatrix}, \quad \Delta G_{ij} = L_{ij} F_{ij} N_{ij} \quad (11.2.16)$$

其中: $F_i \in \mathbb{R}^{\alpha_i \times \beta_i}$ 和 $F_{ij} \in \mathbb{R}^{\alpha_{ij} \times \beta_{ij}}$ 分别是满足 $F_i^T F_i \leq I_{\beta_i}$ 和 $F_{ij}^T F_{ij} \leq I_{\beta_{ij}}$ 的未知矩阵, H_{1i} 、 H_{2i} 、 E_{1i} 、 E_{2i} 、 L_{ij} 和 N_{ij} 是已知的实常数矩阵, $x_i(0) \in \mathcal{Q}_i = \{x_i(0) = U_i v_i : v_i^T v_i \leq 1\}$, U_i 是给定的常数矩阵。

系统的性能指标是

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} [x_i^T(k) Q_i x_i(k) + u_i^T(k) R_i u_i(k)] \quad (11.2.17)$$

其中: $Q_i > 0$ 和 $R_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, N$) 是给定的加权矩阵。

针对系统 (11.2.15) 和性能指标 (11.2.17), 以下将分别讨论分散状态反馈保性能控制器和分散输出反馈保性能控制器的设计问题。

定义 11.2.2 对分散状态反馈控制器 $u_i(k) = K_i x_i(k)$, $i=1, 2, \dots, N$, 如果存在一组对称正定矩阵 $P_i > 0$, $i=1, 2, \dots, N$, 使得对任意非零向量 $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 、所有允许的参数不确定性和关联,

$$\sum_{i=1}^N \{ [(A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_i)x_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j)]^T P_i \cdot [(A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_i)x_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j)] - x_i^T(k)P_i x_i(k) + x_i^T(k)Q_i x_i(k) + x_i^T(k)K_i^T R_i K_i x_i(k) \} < 0 \quad (11.2.18)$$

则该分散控制器称为是系统 (11.2.15) 和性能指标 (11.2.17) 的一个具有二次型性能矩阵 $P_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的分散状态反馈保性能控制器。

由定义 11.2.2 和定理 11.2.1 可知: 若 $u_i(k) = K_i x_i(k)$, $i=1, 2, \dots, N$ 是系统 (11.2.15) 和性能指标 (11.2.17) 的一个具有二次型性能矩阵 $P_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的分散状态反馈保性能控制器, 则该控制器将保证对所有允许的参数不确定性, 闭环系统是渐近稳定的, 且闭环系统的性能指标值满足 (11.2.7)。

以下定理给出了分散状态反馈保性能控制器的存在条件和设计方法。

定理 11.2.3 对系统 (11.2.15) 和性能指标 (11.2.17), 如果对 $i=1, 2, \dots, N$, 存在一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_{ij}$, $j=1, 2, \dots, N$ 、对称正定矩阵 V_i 和矩阵 T_i , 使得

$$\begin{bmatrix} -V_i + \varepsilon_i H_i H_i^T & A_i V_i + B_i T_i & G_i & 0 & L_i & 0 & 0 \\ * & -V_i & 0 & V_i E_{1i}^T + T_i^T E_{2i}^T & 0 & V_i \tilde{Q}_i^T & T_i^T \\ * & * & -I + N_i^T \Gamma_{\beta i} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\Gamma_{\alpha i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.19)$$

其中: 矩阵 \tilde{Q}_i 、 L_i 、 N_i 、 $\Gamma_{\alpha i}$ 、 $\Gamma_{\beta i}$ 、 G_i 在定理 11.2.2 中给出, * 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块。则 $u_i(k) = T_i V_i^{-1} x_i(k)$, $i=1, 2, \dots, N$ 是系统 (11.2.15) 的一个具有性能矩阵 $P_i = V_i^{-1}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的分散保性能控制器, 相应的闭环性能指标值满足 (11.2.14)。

证明 在系统 (11.2.15) 中取控制律 $u_i(k) = T_i V_i^{-1} x_i(k)$, $i=1, 2, \dots, N$, 对所导出的闭环系统应用定理 11.2.2 和矩阵的 Schur 补性质, 即可得到定理结论。

根据定理 11.2.3, 若矩阵不等式 (11.2.19) 是可行的, 则系统 (11.2.15) 存在分散保性能控制器。进而, 定理还给出了用矩阵不等式 (11.2.19) 的任意可行解来构造分散保性

能控制器的方法。对由此得到的分散保性能控制器, (11.2.14) 给出了相应的闭环性能指标值的上界。显然, 不同的分散稳定化控制器所对应的闭环性能上界是不同的。特别地, 具有较小闭环性能上界的保性能控制器是更有意义的。以下将给出设计使得闭环性能指标上界 (11.2.14) 最小化的最优分散保性能控制器的方法。

注意到对给定的常数 $\lambda_i > 0$, $\lambda_{\max}(U_i^T V_i^{-1} U_i) < \lambda_i$ 等价于

$$\lambda_i I - U_i^T V_i^{-1} U_i > 0$$

由矩阵的 Schur 补性质, 上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i I & U_i^T \\ U_i & -V_i \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.20)$$

因此, 在使得矩阵不等式 (11.2.19) 成立的 V_i 、 T_i 、 ε_i 和 γ_{ij} , $j=1, 2, \dots, N$ 中, 寻找相应的闭环性能指标最小上界问题可以转化成为以下的 N 个优化问题 ($i=1, 2, \dots, N$):

$$\min_{\varepsilon_i, \gamma_{ij}, V_i, T_i} \lambda_i \quad (11.2.21)$$

$$\text{s. t. (11.2.19), (11.2.20)}$$

问题 (11.2.21) 是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来求解该问题。如果对 $i=1, 2, \dots, N$, λ_i^* 是问题 (11.2.21) 的最优值, 则 $J^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i^*$ 给出了相应性能指标值上界 (11.2.14) 的最小值。

另一方面, 问题 (11.2.21) 用到的只是各个子系统的数据和变量, 因此, 计算可以在子系统级上完成, 从而降低了大系统问题的计算量。

如果各子系统的状态不能直接测量, 则以上提出的分散状态反馈保性能控制器就不能实现。这时, 我们需要进一步讨论用各子系统的测量输出来设计关联系统的分散保性能控制器。为此, 对第 i 个子系统, 考虑以下形式的满阶动态输出反馈控制器:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(k+1) &= A_{ic} \hat{x}_i(k) + B_{ic} y_i(k), \quad \hat{x}_i(0) = 0 \\ u_i(k) &= C_{ic} \hat{x}_i(k) \end{aligned} \quad (11.2.22)$$

其中: $\hat{x}_i(k) \in \mathbb{R}^n$ 是第 i 个局部控制器的状态, A_{ic} 、 B_{ic} 和 C_{ic} 是待定的控制器参数矩阵。

将控制器 (11.2.22) 应用到系统 (11.2.15), 得到的闭环系统是:

$$\tilde{x}_i(k+1) = (\tilde{A}_i + \Delta \tilde{A}_i) \tilde{x}_i(k) + \sum_{j=1}^N (\tilde{G}_{ij} + \Delta \tilde{G}_{ij}) g_{ij}(x_j) \quad (11.2.23)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(k) &= \begin{bmatrix} x_i(k) \\ \hat{x}_i(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_{ic} \\ B_{ic} C_i & A_{ic} + B_{ic} D_i C_{ic} \end{bmatrix} \\ \Delta \tilde{A}_i &= \tilde{H}_i F_i \tilde{E}_i, \quad \tilde{G}_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \tilde{G}_{ij} = \tilde{L}_{ij} F_{ij} N_{ij} \end{aligned}$$

$$\hat{H}_i = \begin{bmatrix} H_{1i} \\ B_{ic} H_{2i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = [E_{1i} \quad E_{2i} C_{ic}], \quad \tilde{L}_{ij} = \begin{bmatrix} L_{ij} \\ 0 \end{bmatrix}$$

相应的闭环性能指标是

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_i^T(k) \hat{Q}_i \tilde{x}_i(k) \quad (11.2.24)$$

其中

$$\hat{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & C_{ic}^T R_i C_{ic} \end{bmatrix}$$

以下给出分散输出反馈保性能控制的定义。

定义 11.2.3 对闭环系统 (11.2.23) 和性能指标 (11.2.24)，如果存在一组对称正定矩阵 \tilde{P}_i ($i=1, 2, \dots, N$)，使得对任意非零向量 $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T]^T$ 、所有允许的参数不确定性和关联，不等式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \{[(\tilde{A}_i + \Delta \tilde{A}_i) \tilde{x}_i(k) + \sum_{j=1}^N (\tilde{G}_{ij} + \Delta \tilde{G}_{ij}) g_{ij}(x_j)]^T \tilde{P}_i [(\tilde{A}_i + \Delta \tilde{A}_i) \tilde{x}_i(k) \\ & + \sum_{j=1}^N (\tilde{G}_{ij} + \Delta \tilde{G}_{ij}) g_{ij}(x_j)] - \tilde{x}_i^T(k) \tilde{P}_i \tilde{x}_i(k) + \tilde{x}_i^T(k) \hat{Q}_i \tilde{x}_i(k)\} < 0 \end{aligned} \quad (11.2.25)$$

成立，则称控制器 (11.2.22) 是系统 (11.2.15) 的一个具有二次型性能矩阵 \tilde{P}_i ($i=1, 2, \dots, N$) 的分散输出反馈保性能控制器。

根据定理 11.2.1，如果控制器 (11.2.22) 是系统 (11.2.15) 的一个分散输出反馈保性能控制器，则对所有允许的参数不确定性，闭环系统 (11.2.23) 是渐近稳定的，且闭环性能指标值 (11.2.24) 不超过某个确定的上界。

通过对闭环系统 (11.2.23) 和性能指标 (11.2.24) 应用定理 11.2.2，即可得到以下分散输出反馈保性能控制器的存在条件。

定理 11.2.4 对系统 (11.2.23) 和性能指标 (11.2.24)，如果对每一个 $i=1, 2, \dots, N$ ，存在对称正定矩阵 \tilde{V}_i 及一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_{ij}, j=1, 2, \dots, N$ ，使得

$$\begin{bmatrix} -\tilde{V}_i + \varepsilon_i \tilde{H}_i \tilde{H}_i^T & \tilde{A}_i \tilde{V}_i & \tilde{G}_i & 0 & \tilde{L}_i & 0 \\ \tilde{V}_i \tilde{A}_i^T & -\tilde{V}_i & 0 & \tilde{V}_i \tilde{E}_i^T & 0 & \tilde{V}_i \tilde{Q}_i^T \\ \tilde{G}_i^T & 0 & -I + N_i^T \Gamma_{\beta} N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_i \tilde{V}_i & 0 & -\varepsilon_i I & 0 & 0 \\ \tilde{L}_i^T & 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{\alpha i} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i \tilde{V}_i & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.26)$$

其中：

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i & 0 \\ 0 & R_i^{1/2} C_{ic} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}_i = [\tilde{G}_{i1} \quad \tilde{G}_{i2} \quad \dots \quad \tilde{G}_{iN}], \quad \tilde{L}_i = [\tilde{L}_{i1} \quad \tilde{L}_{i2} \quad \dots \quad \tilde{L}_{iN}]$$

Γ_{α} 、 Γ_{β} 、 N_i 和 \tilde{Q}_i 与定理 11.2.2 中给出的相同，则控制器 (11.2.22) 是系统 (11.2.15)

和性能指标 (11.2.17) 的一个分散输出反馈保性能控制器。

在矩阵不等式 (11.2.26) 中, 矩阵变量 \tilde{V}_i 、标量 ε_i 和 γ_y , 以及出现在矩阵 \tilde{A}_i 、 \tilde{H}_i 、 \tilde{E}_i 和 \tilde{Q}_i 中的控制器参数矩阵 A_{ic} 、 B_{ic} 和 C_{ic} , 是以非线性的方式耦合在一起。因此, 矩阵不等式 (11.2.26) 的求解仍然是非常困难的。以下应用变量替换方法, 通过引进一组适当的新变量, 使得对给定的一组正常数 $\varepsilon_i, i=1, 2, \dots, N$, 矩阵不等式 (11.2.26) 转化成为等价的一个关于新变量的线性矩阵不等式, 从而可以应用 LMI 工具箱中的相关求解器来求解所导出的线性矩阵不等式问题。

为此, 首先将矩阵 \tilde{V}_i 和它的逆做分块:

$$\tilde{V}_i = \begin{bmatrix} Y_i & S_i \\ S_i^T & W_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{V}_i^{-1} = \begin{bmatrix} X_i & M_i \\ M_i^T & Z_i \end{bmatrix}$$

其中: $X_i, Y_i \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ 是对称矩阵。等式 $\tilde{V}_i^{-1} \tilde{V}_i = I$ 给出了

$$M_i N_i^T = I - X_i Y_i \quad (11.2.27)$$

定义

$$\Pi_{i1} = \begin{bmatrix} X_i & I \\ M_i^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_{i2} = \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & S_i^T \end{bmatrix}$$

则

$$\tilde{V}_i \Pi_{i1} = \Pi_{i2}, \quad \Pi_{i1}^T \tilde{V}_i \Pi_{i1} = \Pi_{i2}^T \Pi_{i1} = \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \quad (11.2.28)$$

定义一组新变量:

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= X_i A_i Y_i + X_i B_i \hat{C}_i + \hat{B}_i C_i Y_i + M_i A_{ic} S_i^T + \hat{B}_i D_i \hat{C}_i \\ \hat{B}_i &= M_i B_{ic} \\ \hat{C}_i &= C_{ic} S_i^T \end{aligned} \quad (11.2.29)$$

则对给定的对称正定矩阵 X_i 、 Y_i 及可逆矩阵 M_i 、 S_i , 利用关系式 (11.2.29), 由 \hat{A}_i 、 \hat{B}_i 和 \hat{C}_i 可惟一确定控制器参数矩阵 A_{ic} 、 B_{ic} 和 C_{ic} 。

直接通过矩阵的运算, 可得

$$\begin{aligned} \Pi_{i1}^T \tilde{A}_i \tilde{V}_i \Pi_{i1} &= \begin{bmatrix} X_i A_i + \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \\ A_i & A_i Y_i + B_i \hat{C}_i \end{bmatrix}, \quad \Pi_{i1}^T \tilde{V}_i \tilde{E}_i^T = \begin{bmatrix} E_{1i}^T \\ Y_i E_{1i}^T + \hat{C}_i^T E_{2i}^T \end{bmatrix} \\ \Pi_{i1}^T \tilde{V}_i \tilde{Q}_i^T &= \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i^T & 0 \\ Y_i \tilde{Q}_i^T & \hat{C}_i^T R_i^{1/2} \end{bmatrix}, \quad \Pi_{i1}^T \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} X_i H_{1i} + \hat{B}_i H_{2i} \\ H_{1i} \end{bmatrix} \\ \Pi_{i1}^T \tilde{G}_i &= \begin{bmatrix} X_i G_i \\ G_i \end{bmatrix}, \quad \Pi_{i1}^T \tilde{L}_i = \begin{bmatrix} X_i L_i \\ L_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.2.30)$$

以下定理给出了分散输出反馈保性能控制器的设计方法。

定理 11.2.5 对不确定关联系统 (11.2.15) 和性能指标 (11.2.17), 如果对每一个 $i=1, 2, \dots, N$, 存在一组正标量 $\varepsilon_i, \gamma_{ij}, j=1, 2, \dots, N$, 对称正定矩阵 X_i 、 Y_i 及矩阵

\hat{A}_i 、 \hat{B}_i 和 \hat{C}_i , 使得

$$\begin{bmatrix} J_{i11} & J_{i12} \\ * & J_{i22} \end{bmatrix} < 0 \quad (11.2.31)$$

则系统 (11.2.15) 存在形如 (11.2.22) 的分散输出反馈保性能控制器。其中

$$J_{i11} = \begin{bmatrix} -X_i & -I & X_i A_i + \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \\ * & -Y_i & A_i & A_i Y_i + B_i \hat{C}_i \\ * & * & -X_i & -I \\ * & * & * & -Y_i \end{bmatrix}$$

$$J_{i12} = \begin{bmatrix} X_i G_i & 0 & X_i L_i & 0 & 0 & X_i H_{1i} + \hat{B}_i H_{2i} \\ G_i & 0 & L_i & 0 & 0 & H_{1i} \\ 0 & E_{1i}^T & 0 & \tilde{Q}_i^T & 0 & 0 \\ 0 & Y_i E_{1i}^T + \hat{C}_i^T E_{2i}^T & 0 & Y_i \tilde{Q}_i^T & \hat{C}_i^T R_i^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{i22} = \text{diag}\{-I + N_i^T \Gamma_{\beta} N_i, -\varepsilon_i I, -\Gamma_{\alpha}, -I, -I, -\varepsilon_i^{-1} I\}$$

* 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块。

证明 对矩阵不等式 (11.2.26) 分别左乘矩阵 $\text{diag}\{\Pi_i^T, \Pi_i^T, I, I, I, I\}$ 和右乘矩阵 $\text{diag}\{\Pi_i, \Pi_i, I, I, I, I\}$, 并利用矩阵的 Schur 补性质及 (11.2.30) 式中的关系式, 即可得证定理的结论。

对给定的 ε_i 的值, 不等式 (11.2.31) 是关于变量 X_i 、 Y_i 、 \hat{A}_i 、 \hat{B}_i 、 \hat{C}_i 和 γ_{ij} 的线性矩阵不等式, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 `feasp` 来求解该线性矩阵不等式。

如果求得了矩阵不等式 (11.2.31) 的一个可行解, 则可以按以下步骤构造出所求的分散输出反馈保性能控制器:

1. 通过对矩阵 $I - X_i Y_i$ 进行奇异值分解, 可以求出使得 (11.2.27) 成立的可逆矩阵 M_i 和 S_i 。
2. 从 (11.2.29) 式求出控制器参数矩阵 A_{ic} 、 B_{ic} 和 C_{ic} 。

从定理 11.2.5 和以上的讨论可知: 若矩阵不等式 (11.2.31) 是可行的, 则从该矩阵不等式的可行解可以构造系统 (11.2.15) 的分散输出反馈保性能控制器, 进而, 其相应的闭环性能指标值满足

$$J \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(U_i^T X_i U_i) \quad (11.2.32)$$

因此, 通过建立和求解以下的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon_i, \gamma_{ij}, X_i, Y_i, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i} \quad & \bar{J} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \\ \text{s.t.} \quad & U_i^T X_i U_i < \lambda_i I \\ & (11.2.31), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (11.2.33)$$

可以设计使得性能指标上界 (11.2.32) 最小化的分散保性能控制器。由于对每一个 $i=1, 2, \dots, N$, $\lambda_i > 0$, 问题 (11.2.33) 可进一步转化成子系统级上的 N 个优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon_i, Y_{i1}, \dots, Y_{iN}, X_i, Y_i, \hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i} \lambda_i & \quad (11.2.34) \\ \text{s. t.} \quad (11.2.31) & \end{aligned}$$

$$U_i^T X_i U_i < \lambda_i I, \quad i=1, 2, \dots, N$$

对任意使得矩阵不等式 (11.2.31) 式可行的 $\varepsilon_i > 0$ 的取值, 优化问题 (11.2.34) 是具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此, 可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 来得到关于其余变量的优化问题的全局最优解。进一步, 通过对正标量 ε_i 的一维搜索, 可以得到问题 (11.2.34) 的全局最优解。

如果对 $i=1, 2, \dots, N$, λ_i^* 是问题 (11.2.34) 的最优值, 则 $J^* = \sum_{i=1}^N \lambda_i^*$ 给出了上界 (11.2.32) 的全局最小值。

附录 A LMI 工具箱介绍

线性矩阵不等式 (LMI) 工具箱是求解一般线性矩阵不等式问题的一个高性能软件包。由于其面向结构的线性矩阵不等式表示方式,使得各种线性矩阵不等式能够以自然块矩阵的形式加以描述。一个线性矩阵不等式问题一旦确定,就可以通过调用适当的线性矩阵不等式求解器来对这个问题进行数值求解。

LMI 工具箱提供了确定、处理和数值求解线性矩阵不等式的一些工具,它们主要用于:

- 以自然块矩阵形式来直接描述线性矩阵不等式;
- 获取关于现有的线性矩阵不等式系统的信息;
- 修改现有的线性矩阵不等式系统;
- 求解 3 个一般的线性矩阵不等式问题;
- 验证结果。

本附录将详细介绍 LMI 工具箱所提供的用于解决以上各个问题的有关函数和命令。

A.1 线性矩阵不等式及相关术语

一个线性矩阵不等式可以表示成以下的一般形式:

$$L(x) = L_0 + x_1 L_1 + \cdots + x_N L_N < 0 \quad (A.1.1)$$

其中: L_0, L_1, \dots, L_N 是给定的对称矩阵, $x = [x_1, \dots, x_N]^T \in \mathbf{R}^N$ 是由其中的变量组成的向量。一般称 x_1, \dots, x_N 为决策变量; x 是由决策变量构成的向量,简称决策向量。

尽管表达式 (A.1.1) 是相当一般的,但在自动控制应用中的线性矩阵不等式却很少以这样的形式出现。例如, Lyapunov 矩阵不等式

$$A^T X + X A < 0 \quad (A.1.2)$$

其中: 矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, 变量 $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}$ 是一个对称矩阵。不等式 (A.1.2) 中的决策变量是矩阵 X 中的独立元 x_1, x_2, x_3 , 将该矩阵不等式写成一般形式 (A.1.1) 时, 得到

$$x_1 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} < 0 \quad (A.1.3)$$

显然, 与 Lyapunov 矩阵不等式 (A.1.2) 相比, 这样的表示式缺少了许多控制中的直观意义。另外, (A.1.3) 式涉及到的矩阵也比 (A.1.2) 式中的多。如果矩阵 A 是 n 阶的, 则 (A.1.3) 式中的系数矩阵一般有 $n(n+1)/2$ 个, 因此这样的表达式将占用更多的存储空间。

由于这样的一些原因, LMI 工具箱中的函数采用线性矩阵不等式的结构来表示。例如, Lyapunov 不等式 $A^T X + XA < 0$ 就表示成矩阵变量 X 的函数。

一般地, 一个线性矩阵不等式具有块矩阵的形式, 其中每一个块都是矩阵变量的仿射函数。以下通过一个例子来说明有关描述一个线性矩阵不等式的术语。

考虑 H_∞ 控制中的一个线性矩阵不等式:

$$N^T \begin{bmatrix} A^T X + XA & XC^T & B \\ CX & -\gamma I & D \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix} N < 0$$

其中: A 、 B 、 C 、 D 、 N 是给定的矩阵, $X = X^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$ 是问题的变量。

- N 称为外因子, 块矩阵

$$L(X, \gamma) = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XC^T & B \\ CX & -\gamma I & D \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix}$$

称为内因子。外因子可以不是一个正方形矩阵, 它在许多问题中常常不出现。

- X 和 γ 是问题的矩阵变量。注意, 标量也可以看成是一个 1×1 维的矩阵。
- 内因子 $L(X, \gamma)$ 是一个对称块矩阵。根据对称性, $L(X, \gamma)$ 可以由对角线及其上方的块矩阵完全确定。
- $L(X, \gamma)$ 中的每一块都是矩阵变量 X 和 γ 的仿射函数。这一函数由常数项和变量项这两类基本项组成, 其中常数项就是常数矩阵或以一些常数矩阵组成的算术表达式, 例如 $L(X, \gamma)$ 中的 B 和 D ; 变量项是包含一个矩阵变量的项, 例如 XA 、 γI 等。

一个线性矩阵不等式不论多么复杂, 都可以通过描述其中每一块的各项内容来确定这个线性矩阵不等式。

A.2 线性矩阵不等式的确定

LMI 工具箱可以处理具有以下一般形式的线性矩阵不等式:

$$N^T L(X_1, \dots, X_K) N < M^T R(X_1, \dots, X_K) M$$

其中: X_1, \dots, X_K 是具有一定结构的矩阵变量, 左、右外因子 N 和 M 是具有相同维数的给定矩阵, 左、右内因子 $L(\cdot)$ 和 $R(\cdot)$ 是具有相同块结构的对称块矩阵。

注意, 在线性矩阵不等式的描述中, 左边总是指不等式较小的一边, 例如对线性矩阵不等式 $X > 0$, X 称为是不等式的右边, 0 称为是不等式的左边, 常表示成 $0 < X$ 。

要确定一个线性矩阵不等式系统, 需要做以下两步:

1. 给出每个矩阵变量 X_1, \dots, X_K 的维数和结构;
2. 描述每一个线性矩阵不等式中各个项的内容。

这个过程产生所描述线性矩阵不等式系统的一个内部表示, 它以一个单一向量的形式储存在计算机内, 通常用一个名字, 例如 `lmisys` 来表示。该内部表示 `lmisys` 可以在后面处理这个线性矩阵不等式时调用。

下面将通过 LMI 工具箱中的一个例子来说明线性矩阵不等式系统的确定。运行 `lmidem` 可以看到这个例子的完整描述。

例 A.2.1 考虑一个具有 4 个输入、4 个输出和 6 个状态的稳定传递函数

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{A.2.1})$$

和一组具有以下块对角结构的输入/输出尺度矩阵 D :

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 & d_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.2})$$

则在具有时变不确定性系统的鲁棒稳定性分析中提出了以下问题:

寻找一个具有结构 (A.2.2) 的尺度矩阵 D , 使得 $\sup_{\omega} \|DG(j\omega)D^{-1}\| < 1$ 。

可以证明: 这样一个问题可以转化成一个线性矩阵不等式系统的可行性问题, 即寻找两个对称矩阵 $X \in \mathbf{R}^{6 \times 6}$ 和 $S = D^T D \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$, 使得

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T S C & XB \\ B^T X & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.2.3})$$

$$X > 0 \quad (\text{A.2.4})$$

$$S > I \quad (\text{A.2.5})$$

用命令 `lmivar` 和 `lmiterm` 给出线性矩阵不等式系统 (A.2.3) ~ (A.2.5) 的内部描述如下:

```
setlmis([])
X=lmivar(1,[6 1])
S=lmivar(1,[2 0;2 1])

% 1st LMI
lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([1 1 1 S],C',C)
lmiterm([1 1 2 X],1,B)
lmiterm([1 2 2 S],[-1,1])

% 2nd LMI
lmiterm([-2 1 1 X],1,1)

% 3rd LMI
lmiterm([-3 1 1 S],1,1)
```

```
lmiterm([3 1 1 0],1)
```

```
lmisys=getlmis
```

其中：函数 `lmivar` 定义了两个矩阵变量 X 和 S ，`lmiterm` 则描述了每一个线性矩阵不等式中各项的内容。`getlmis` 回到了这个线性矩阵不等式系统的内部表示 `lmisys`，`lmisys` 也称为是储存在机器内部的线性矩阵不等式系统的名称。以下将详细介绍这几个函数的功能和用法。

setlmis 和 getlmis

一个线性矩阵不等式系统的描述以 `setlmis` 开始，以 `getlmis` 结束。当要确定一个新的系统时，输入：

```
setlmis({})
```

如果需要将一个线性矩阵不等式添加到一个名为 `lmiso` 的现有的线性矩阵不等式系统中，则输入：

```
setlmis(lmiso)
```

当线性矩阵不等式系统被完全确定好后，输入：

```
lmisys=getlmis
```

该命令返回这个线性矩阵不等式系统的内部表示 `lmisys`。

lmivar

函数 `lmivar` 用来描述出现在线性矩阵不等式系统中的矩阵变量，每一次只能描述一个矩阵变量。矩阵变量的描述包括该矩阵变量的结构。该函数的一般表达式是：

```
X=lmivar(type,struct)
```

这一函数定义了一个新的矩阵变量 X 。函数中的第一个输入量 `type` 确定了矩阵变量 X 的类型，第二个输入量 `struct` 进一步根据变量 X 的类型给出该变量的结构。变量的类型分成三类：

Type = 1: 对称块对角结构。这种结构对应于具有以下形式的矩阵变量：

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_r \end{bmatrix}$$

其中对角线上的每一个矩阵块 D_i 是方阵，它可以是零矩阵、对称矩阵或数量矩阵。这种结构也包含了通常意义的对称矩阵和数量矩阵（分别相当于只有一块）。此时，`struct` 是一个 $r \times 2$ 维的矩阵。如果该矩阵的第 i 行是 (m, n) ，则其中的 m 表示对称矩阵块 D_i 的阶数，而

n 只能取 1, 0 或 -1。其中 $n=1$ 表示 D_i 是一个满的对称矩阵 (或无结构的对称矩阵); $n=0$ 表示 D_i 是一个数量矩阵; $n=-1$ 表示 D_i 是一个零矩阵。

Type = 2: 长方型结构。这种结构对应于任意的长方矩阵。此时, $\text{struct}=(m, n)$ 表示矩阵的维数。

Type = 3: 其他结构。这种结构用来描述更加复杂的矩阵, 也可以用于描述矩阵变量之间的一些关联。 X 的每一个元或者是 0, 或者是 $\pm x_n$, 其中 x_n 是第 n 个决策变量。相应地, struct 是一个和变量 X 有相同维数的矩阵, 其中的每一个元取值如下:

$$\text{struct}(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } X(i, j) = 0 \\ n, & \text{如果 } X(i, j) = x_n \\ -n, & \text{如果 } X(i, j) = -x_n \end{cases}$$

例 A.2.2 考虑具有三个矩阵变量 X_1 、 X_2 和 X_3 的线性矩阵不等式系统, 其中

- X_1 是一个 3×3 维的对称矩阵;
- X_2 是一个 2×4 维的长方矩阵;
- $X_3 = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 I_2 \end{bmatrix}$, 其中 Δ 是 5×5 维的对称矩阵, δ_1 和 δ_2 是两个标量, I_2 表示 2×2 维的单位矩阵。

可以应用 `lmivar` 来定义这些矩阵变量:

```
setlmis([])
X1=lmivar(1,[3 1])
X2=lmivar(2,[2 4])
X3=lmivar(1,[5 1;1 0;2 0])
```

lmiterm

在确定了矩阵变量之后, 还需要确定每一个线性矩阵不等式中各项的内容。线性矩阵不等式的项指构成这个线性矩阵不等式的块矩阵中的求和项。这些项可以分成三类:

1. 常数项;
2. 变量项, 即包含了矩阵变量的项, 例如 (A.1.3) 式中的 $A^T X$ 和 $C^T S C$ 。一般的变量项具有形式 PXQ , 其中的 X 是一个变量, P 和 Q 是给定的矩阵, 分别称为该变量项的左系数和右系数;
3. 外因子。

在描述一个具有多个块的线性矩阵不等式时, LMI 工具箱提供了这样的功能, 即只需要确定对角线上和对角线上方的项的内容, 或者只描述对角线上和对角线下方的项的内容, 其他部分项的内容可以根据线性矩阵不等式的对称性得到。

用命令 `lmiterm` 每次可以确定线性矩阵不等式的一个项的内容。例如, 对线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + C^T SC & XB \\ B^T X & -S \end{bmatrix} < 0$$

可以用以下一组命令来描述:

```
lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([1 1 1 S],C',C)
lmiterm([1 1 2 X],1,B)
lmiterm([1 2 2 S],-1,1)
```

这些命令依次描述了项 $A^T X + XA$ 、 $C^T SC$ 、 XB 和 $-S$ 。在每一条命令中,第1项是一个4元向量,它刻画了所描述的项所在的位置和特征,其中:

- 第1个元表示所描述的项属于哪一个线性矩阵不等式。值 m 表示第 m 个不等式的左边, $-m$ 表示第 m 个不等式的右边。
- 第2和第3个元表示所描述的项所在块的位置。例如,向量 $[1\ 1\ 2\ 1]$ 表示所描述的项位于第一个线性矩阵不等式左边内因子的块 $(1, 2)$ 中。第2和第3个元均取零表示所描述的项在外因子中。
- 最后一个元表明了所描述的项是常数项还是变量项。如果是变量项,则进一步说明涉及哪一个变量。0 表示常数项, k 表示所描述的项包含第 k 个矩阵变量 X_k , $-k$ 则表示包含矩阵变量 X_k 的转置 X_k^T (在例1中, X 是第1个变量, S 是第2个变量,它们按确定的先后顺序排列)。

lmiterm 的第2项和第3项包含了数据 (常数项的值,外因子,变量项 PXQ 或 $PX^T Q$ 中的左、右系数)。第4项是可选择的,且只能是's'。

在描述项的内容时,有一些简化的方法。

1. 零块可以省略描述。

2. 可以通过在命令 lmiterm 中外加一个分量's',使得可以只用一条命令 lmiterm 就能描述一个变量项与该变量项的转置的和。例如,上面的第一条命令描述了 $A^T X + XA$ 。

3. 可以用一个标量值来表示一个数量矩阵,即用 α 表示数量矩阵 αI ,其中 α 是一个标量。如例1中的第3个不等式 $S > I$ 被描述成

```
lmiterm([-3 1 1 S],1,1)
lmiterm([3 1 1 0],1)
```

为了便于阅读,也可以用线性矩阵不等式和矩阵变量的名称来表示对应的线性矩阵不等式和矩阵变量。矩阵变量的变量名可以用命令 lmivar 来赋值,线性矩阵不等式的名称则可以用函数 newlmi 来确定。这些标识符可以用在命令 lmiterm 中以表示相应的线性矩阵不等式或矩阵变量。对例1中的线性矩阵不等式系统,采用名称的相应描述如下:

```
setlmis([])
X=lmivar(1,[6 1])
```

```
S=lmivar(1,[2 0;2 1])

BRL=newlmi
lmiterm([BRL 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([BRL 1 1 S],C',C)
lmiterm([BRL 1 2 X],1,B)
lmiterm([BRL 2 2 S],-1,1)

Xpos=newlmi
lmiterm([-Xpos 1 1 X],1,1)

Slmi=newlmi
lmiterm([-Slmi 1 1 S],1,1)
lmiterm([Slmi 1 1 0],1)

lmisys=getlmis
```

其中： X 和 S 分别表示变量 X 和 S ，而 BRL 、 $Xpos$ 和 $Slmi$ 则分别表示第 1、第 2 和第 3 个线性矩阵不等式。 $-Xpos$ 指的是第 2 个线性矩阵不等式的右边， $-X$ 表示变量 X 的转置。

lmiedit

线性矩阵不等式编辑器 lmiedit 是一个图形用户界面，它可以按符号方式直接确定线性矩阵不等式系统。输入

```
lmiedit
```

出现一个具有一些可编辑文本区域和各种按钮的窗口。按以下步骤来确定一个线性矩阵不等式系统：

1. 在文本区域的上半部分给出每一个矩阵变量的描述（名字和结构），其结构是通过类型（ S 表示对称块矩阵， R 表示无结构的长方矩阵， G 表示其他结构矩阵）和一个“附加”的结构矩阵（类似于 `lmivar` 中的 `struct`）来刻画的。在文本编辑区，使用一行描述一个变量。

2. 在文本区的下半部分，按 MATLAB 的表示方式给出要描述的线性矩阵不等式。例如，线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -I \end{bmatrix} < 0$$

可以通过输入

```
[A'*X+X*A X*B;B'*X -1]<0
```

来描述。其中 X 是文本区上半部分描述矩阵变量 X 的变量名。一个线性矩阵不等式的描述

可能需要几行，但一行中最多只能描述一个线性矩阵不等式。

完成了线性矩阵不等式系统的描述后，可以通过按相应的按钮来完成以下的任务：

- 显示用于描述线性矩阵不等式的 `lmivar/lmiterm` 命令串（按钮 `view commands`）；反之，通过单击“`describe...`”按钮可以将用一串 `lmivar/lmiterm` 命令定义的线性矩阵不等式系统按 MATLAB 表示式显示。
- 将线性矩阵不等式的符号描述存为一个 MATLAB 语句串（按钮 `save`）。以后可以通过按钮 `load` 重新显示这种描述。
- 可以从一个文件读一串 `lmivar/lmiterm` 命令（按钮 `read`），然后通过单击“`describe the matrix variables`”或“`describe the LMIs ...`”显示出由这些命令确定的线性矩阵不等式系统的符号表示。
- 写一串用于描述一个特殊线性矩阵不等式系统的 `lmivar/lmiterm` 命令（按钮 `write`）。
- 通过按钮 `create` 产生线性矩阵不等式系统的内部表示，结果用一个以线性矩阵不等式命名的 MATLAB 变量记录（如果线性矩阵不等式系统名是 `mylmi`，则其内部表示用 MATLAB 变量 `mylmi` 记录）。内部表示 `mylmi` 可以被线性矩阵不等式求解器或任何其他线性矩阵不等式函数调用。

如同命令 `lmiterm` 一样，可以应用简捷的方法来输入线性矩阵不等式的表示式。例如零块可以简单地输入 0，而不必定义其维数，类似地，单位矩阵只需输入数字 1 等。

`lmiedit` 尽管很一般，但它没有 `lmiterm` 灵活。以下是 `lmiedit` 的一些局限性：

- 在矩阵变量的两边不能使用括号。例如当 X 是一个变量名时，

$$(A^*X+B)^* * C + C^* * (A^*X+B)$$

是不允许的，而

$$(A+B)^* * X + X^* * (A+B)$$

则是可以的。

- 不允许出现循环和条件语句。
- 当把 `lmiterm` 命令转换成一个线性矩阵不等式的符号描述时，如果 `lmiterm` 的第 1 个分量不能确认就将出错。使用由 `newlmi` 和 `lmivar` 提供的线性矩阵不等式和变量标识符可以避免这样的问题。

图 A.1 给出了用 `lmiedit` 描述例 1 中的线性矩阵不等式系统的窗口。

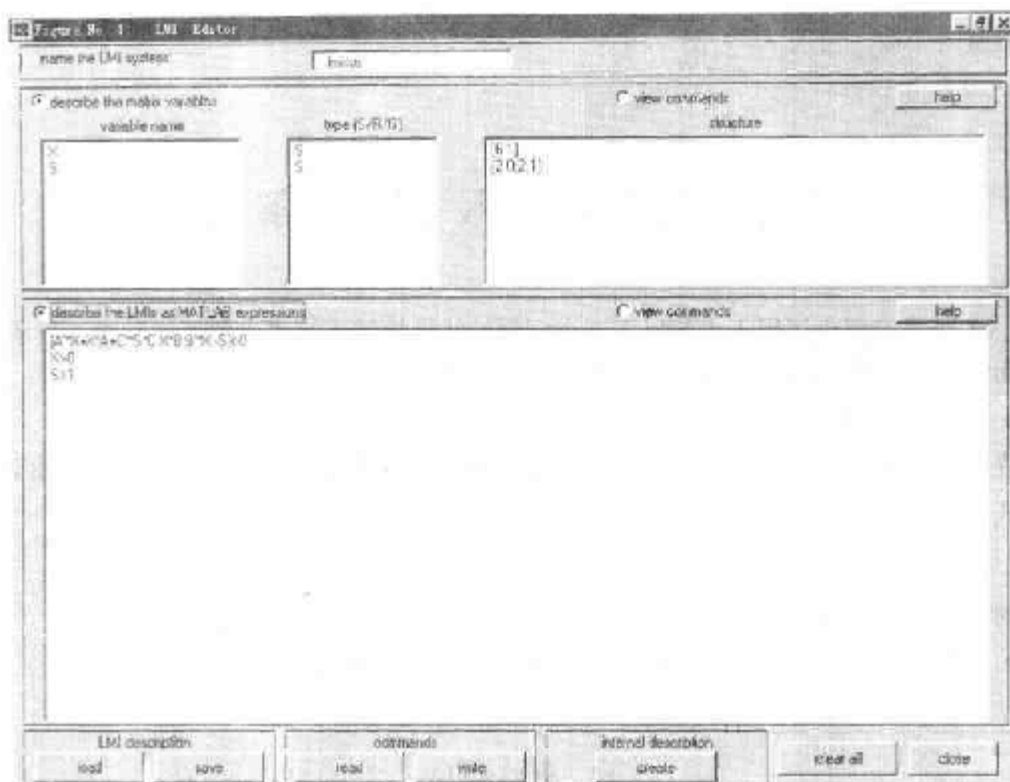


图 A.1 lmiedit 的图形界面

A.3 信息提取

线性矩阵不等式系统的完整描述是以一个叫做内部表示的向量储存在机器内的。LMI 工具箱提供了 3 个函数 `lmiinfo`、`lminbr` 和 `matnbr`，它们可以从内部表示向量中提取线性矩阵不等式的相关信息，并以用户可读的方式显示出来。

lmiinfo

`lmiinfo` 是一种交互式工具，用以反映有关线性矩阵不等式系统的一些信息。这些信息包括线性矩阵不等式的个数、矩阵变量的个数和它们的结构、每一个线性矩阵不等式块中项的内容等。为了调用 `lmiinfo`，输入

```
lmiinfo(lmisys)
```

其中的 `lmisys` 是由 `getlmis` 产生的线性矩阵不等式系统的内部表示。

lminbr 和 matnbr

这两个函数给出了系统中线性矩阵不等式的个数和矩阵变量的个数。例如，为了得到

矩阵变量的个数，输入

`matnbr(lmisys)`

A.4 线性矩阵不等式求解器

LMI 工具箱提供了用于求解以下三个问题的线性矩阵不等式求解器（其中 \mathbf{x} 表示决策变量向量，即矩阵变量 $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ 中的独立变元构成的向量）。

- 可行性问题

寻找一个 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ （或等价的：具有给定结构的矩阵 $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k$ ），使得满足线性矩阵不等式系统

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) < \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

相应的求解器是 `feasp`。

- 具有线性矩阵不等式约束的一个线性目标函数的最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}) < \mathbf{B}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

相应的求解器是 `mincx`。

- 广义特征值的最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}(\mathbf{x}) < \mathbf{D}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

$$\mathbf{0} < \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{A.4.2}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) < \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}) \tag{A.4.3}$$

相应的求解器是 `gevp`。

以下详细介绍这 3 个求解器的功能和使用方法。

feasp

求解器 `feasp` 的一般表达式如下：

`[tmin, xfeas]=feasp(lmisys,options,target)`

求解器 `feasp` 是通过求解如下的一个辅助凸优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \leq t\mathbf{I} \end{aligned}$$

来求解线性矩阵不等式系统 `lmisys` 的可行性问题。

这个凸优化问题的全局最优值用 `tmin` 表示，作为求解器 `feasp` 输出的第一个分量。如

果 $t_{\min} < 0$, 则系统 l_{misys} 是可行的。当系统 l_{misys} 为可行时, 求解器 feasp 输出的第二个分量 xfeas 给出了该线性矩阵不等式系统决策变量的一个可行解。进而, 应用 dec2mat 可以得到系统 l_{misys} 矩阵变量的一个可行解。

求解器 feasp 的输入变量 target 为 t_{\min} 设置了目标值, 使得只要 $t_{\min} < \text{target}$, 则优化迭代过程就结束。 $\text{target}=0$ 是 feasp 的默认值。

可选的输入量 options 是一个 5 维向量, 它用来描述优化迭代过程中的一些控制参数:

- $\text{options}(1)$: 该分量不用。
- $\text{options}(2)$: 该参数设定优化迭代过程中允许的最大迭代次数 (该参数的默认值是 100)。
- $\text{options}(3)$: 该参数设定了可行域的半径。 $\text{options}(3)=R>0$ 表示限制决策变量在球体

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^2 < R^2$$

中, 或者说向量 xfeas 的欧氏范数不超过 R 。该参数的默认值是 $R=10^9$ 。可行域半径的设定可以避免产生具有很大大数值的解 \mathbf{x} , 同时也可以加快计算过程, 改进数值稳定性。

- $\text{options}(4)$: 该参数用于加快迭代过程的结束, 它提供了反映优化过程中迭代速度和解的精度之间的一个折衷指标。当该参数取值为一个正整数 J 时, 表示在最后的 J 次迭代中, 如果每次迭代后 t 的减小幅度不超过 1%, 则优化迭代过程就停止。该参数的默认值是 10。
- $\text{options}(5)$: $\text{options}(5)=1$ 表示不显示迭代过程中的数据, $\text{options}(5)=0$ (默认值) 则相反。

将 $\text{options}(i)$ 设置为零相当于将相应的控制参数设置为默认值, 也可以通过忽略该输入变量来接受默认值。

例 A.4.1 求满足 $\mathbf{P} > \mathbf{I}$ 的对称矩阵 \mathbf{P} , 使得

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_1 < \mathbf{0} \quad (\text{A.4.4})$$

$$\mathbf{A}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_2 < \mathbf{0} \quad (\text{A.4.5})$$

$$\mathbf{A}_3^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_3 < \mathbf{0} \quad (\text{A.4.6})$$

其中:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 1.5 \\ 1.3 & -2.7 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1.4 & 0.9 \\ 0.7 & -2.0 \end{bmatrix}$$

为了调用 feasp , 首先确定线性矩阵不等式系统:

```
setlmis{[]}  
P=lmivar(1,[2 1])
```

```
lmiterm([1 1 1 P],1,A1,'s')    % LMI #1
lmiterm([2 1 1 P],1,A2,'s')    % LMI #2
lmiterm([3 1 1 P],1,A3,'s')    % LMI #3
lmiterm([-4 1 1 P],1,1)        % LMI #4: P
lmiterm([4 1 1 0],1)          % LMI #4: 1
lmis=getlmis
```

然后调用 **feasp** 来求该线性矩阵不等式系统的一个可行决策变量:

```
[tmin,xfeas]=feasp(lmis)
```

得到 $tmin = -3.1363$ 。因此，线性矩阵不等式系统 $lmis$ 是可行的。应用 **dec2mat**

```
PP=dec2mat(lmis,xfeas,P)
```

得到问题的可行矩阵变量值:

$$P = \begin{bmatrix} 270.8 & 126.4 \\ 126.4 & 155.1 \end{bmatrix}$$

在求解这个可行性问题的过程中，也可以附加一些约束，例如，要求矩阵 P 的 Frobenius 范数不超过 10，且 $tmin \leq -1$ 。可以通过调用

```
[tmin,xfeas]=feasp(lmis,[0,0,10,0,0],-1)
```

来满足这些附加要求。相应的结果是 $tmin = -1.1745$ ，相应的矩阵 P 的最大特征值是 $\lambda_{\max}(P) = 9.6912$ 。

mincx

求解器 mincx 的一般表达式如下:

```
[copt,xopt]=mincx(lmisys,c,options,xinit,target)
```

问题中的线性矩阵不等式系统由 $lmisys$ 表示，向量 c 和决策变量向量 x 有相同的维数。对于由矩阵变量表示的线性目标函数，可以应用函数 **defcx** 来得到适当的向量 c 。函数 **mincx** 返回到目标函数 $c^T x$ 的全局最优值 $copt$ 和决策变量的最优解 $xopt$ ，相应的矩阵变量的最优解可以应用函数 **dec2mat** 从 $xopt$ 得到。

函数 **mincx** 的输入量中除了 $lmisys$ 和 c 以外，其他的输入是可选择的。 $xinit$ 是最优解 $xopt$ 的一个初始猜测（可以从矩阵变量 X_1, \dots, X_k 的给定值，通过使用 **mat2dec** 来导出 $xinit$ ），当输入的 $xinit$ 不是一个可行解时，它将被忽略；否则，则有可能加快问题求解的过程。

$target$ 是目标函数的一个设定目标，只要某个可行的 x 满足 $c^T x \leq target$ ，求解过程就停止。

$options$ 是一个 5 维向量，用来描述优化迭代过程中的一些控制参数:

- options(1): 该参数确定了最优值 copt 所要求的精度 (默认值是 10^{-2})。
- options(2): 该参数设定优化迭代过程中允许的最大迭代次数 (默认值是 100)。
- options(3): 该参数设定了可行域的半径。与求解器 `feasp` 中的相应参数相同。
- options(4): 该参数用于加快迭代过程的结束。当该参数取值为一个正整数 J 时, 表示在最后的 J 次迭代中。如果每次迭代后, 目标函数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ 的减小幅度在给定的精度内, 则优化迭代过程就停止。该参数的默认值是 5。
- options(5): options(5)=1 表示不显示迭代过程中的数据, options(5)=0 (默认值) 则相反。

将 options(i) 设置为零相当于将相应的控制参数设置为默认值, 也可以通过忽略该输入变量来接受默认值。

以下的例子说明了求解器 `mincx` 的使用方法。

例 A.4.2 考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{Trace}(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{X} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{X} + \mathbf{Q} < \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中: \mathbf{X} 是一个对称的矩阵变量,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -12 \\ 0 & -12 & -36 \end{bmatrix}$$

根据矩阵的 Schur 补性质, 本例中的优化问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{Trace}(\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{Q} & \mathbf{X} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{X} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned}$$

由于 $\text{Trace}(\mathbf{X})$ 是 \mathbf{X} 的元的一个线性函数, 因此以上的优化问题是一个具有线性矩阵不等式约束的线性目标函数的最小化问题, 从而可以应用求解器 `mincx` 来求解这个问题。以下给出用 `mincx` 来求解该问题的过程。

1. 定义线性矩阵不等式约束

```
setlmis([])
X=lmivar(1,[3 1]) % 变量 X, 满对称的

lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([1 1 1 0],Q)
lmiterm([1 2 2 0],-1)
lmiterm([1 2 1 X],B',1)
```

```
LMIs=getlmis
```

2. 将目标函数 $\text{Trace}(X)$ 写成 $c^T x$ ，其中 x 是矩阵变量 X 中的独立元所构成的向量。由于引进向量 c 的目的是要选择 X 的对角元，因此它可以作为相应于 $X = I$ 的决策向量得到，即

```
c=mat2dec(LMIs,eye(3))
```

事实上，函数 `defcx` 将提供一个确定这样的目标函数的更加系统化的方法。

3. 调用 `mincx` 计算最小值 x_{opt} ，目标函数的全局最小值 $c_{opt}=c'*x_{opt}$ 。

```
options=[1e-5,0,0,0,0]
[copt,xopt]=mincx(LMIs,c,options)
```

其中 $1e-5$ 给定了所要求的关于 c_{opt} 的计算精度。

作为求解器 `mincx` 运行的结果，以下的信息将出现在屏幕上：

```
Solver for linear objective minimization under LMI constraints
```

```
Iterations : Best objective value so far
```

```

1
2          -8.511476
3          -13.063640
***          new lower bound:  -34.023978
4          -15.768450
***          new lower bound:  -25.005604
5          -17.123012
***          new lower bound:  -21.306781
6          -17.882558
***          new lower bound:  -19.819471
7          -18.339853
***          new lower bound:  -19.189417
8          -18.552558
***          new lower bound:  -18.919668
9          -18.646811
***          new lower bound:  -18.803708
10         -18.687324
***          new lower bound:  -18.753903
```

```

11          -18.705715
***          new lower bound:  -18.732574
12          -18.712175
***          new lower bound:  -18.723491
13          -18.714880
***          new lower bound:  -18.719624
14          -18.716094
***          new lower bound:  -18.717986
15          -18.716509
***          new lower bound:  -18.717297
16          -18.716695
***          new lower bound:  -18.716873

Result: feasible solution of required accuracy
best objective value:  -18.716695
guaranteed relative accuracy: 9.50e-006
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009

```

迭代的次数和当前这次迭代时 $c^T x$ 的最佳值分别在左列和右列中。注意, 在第一次迭代中没有一个对应的目标函数值, 这表明满足约束条件的可行解 x 只是在第二次迭代时才被找到。

4. mincx 也给出决策变量 x_{opt} 的最优值。相应的矩阵变量最优值由以下函数给出

```
Xopt=dec2mat(LMIs,xopt,X)
```

由此可以得到:

$$X_{opt} = \begin{bmatrix} -6.3542 & -5.8895 & 2.2046 \\ -5.8895 & -6.2855 & 2.2201 \\ 2.2046 & 2.2201 & -6.0771 \end{bmatrix}$$

gevp

求解器 **gevp** 的一般表达式如下:

```
[lopt,xopt]=gevp(lmisys,nlfc,options,linit,xinit,target)
```

如果问题的线性矩阵不等式约束是可行的, 则 **gevp** 给出了优化问题的全局最小值 $lopt$ 和决策向量 x 的最优解 x_{opt} 。相应的矩阵变量的最优解可以应用 **dec2mat** 得到。

输入分量 **lmisys** 表示当 $\lambda=1$ 时由 (A.2.3) ~ (A.2.5) 构成的线性矩阵不等式系统。包含 λ 的线性矩阵不等式系统称为线性分式约束。线性分式约束 (A.2.5) 的个数用 **nlfc** 表示,

其他的输入分量都是可选择的。

如果 $(\lambda_0, \mathbf{x}_0)$ 是一个可行解, 则通过令 $\text{limit} = \lambda_0$ 、 $\text{xinit} = \mathbf{x}_0$, 将 $(\lambda_0, \mathbf{x}_0)$ 设置为 `gevp` 的初始值。当 $(\lambda_0, \mathbf{x}_0)$ 不是可行解时, 这样的初始值设置不会被接受。`target` 的设定值表明了只要当一个可行解 (λ, \mathbf{x}) 满足 $\lambda \leq \text{target}$ 时, 迭代过程就停止。

可选择的输入量 `options` 是一个 5 维向量, 用来描述优化迭代过程中的一些控制参数:

- `options(1)`: 该参数设定了最优值 `lopt` 所要求的精度 (默认值是 10^{-2})。
- `options(2)`: 该参数设定优化迭代过程中允许的最大迭代次数 (默认值是 100)。
- `options(3)`: 该参数设定了可行域的半径。与求解器 `feasp` 中的相应参数相同。
- `options(4)`: 该参数用于加快迭代过程的结束。当该参数取值为一个正整数 J 时, 表示在最后的 J 次迭代中, 如果每次迭代后 λ 的减小幅度在给定的精度内, 则优化迭代过程就停止。该参数的默认值是 5。
- `options(5)`: `options(5)=1` 表示不显示迭代过程中的数据, `options(5)=0` (默认值) 则相反。

将 `options(i)` 设置为零相当于将相应的控制参数设置为默认值, 也可以通过忽略该输入变量来接受默认值。

对广义特征值的最小化问题, 在调用求解器 `gevp` 时, 须遵循以下规则:

- 确定包含 λ 的线性矩阵不等式: $A(\mathbf{x}) < B(\mathbf{x})$ (注意没有 λ) ;
- 总是把 $A(\mathbf{x}) < B(\mathbf{x})$ 放在线性矩阵不等式系统的最后;
- 要求有约束 $0 < B(\mathbf{x})$, 或者保证 $0 < B(\mathbf{x})$ 成立的任何其他约束。

根据以上要求, 对于

$$B(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} B_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1(\mathbf{x}) > 0$$

的广义特征值优化问题, 我们就不能直接应用求解器 `gevp` 来求解。为了克服这一困难, 可以通过引进矩阵变量 Y , 并用

$$A(\mathbf{x}) < \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y < \lambda B_1(\mathbf{x}), \quad B(\mathbf{x}) > 0$$

来代替

$$A(\mathbf{x}) < \lambda B(\mathbf{x}), \quad B(\mathbf{x}) > 0$$

而等价的新问题可以用 `gevp` 来求解。

例 A.4.3 对以下的 3 个系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t), \quad (i = 1, 2, 3)$$

其中矩阵 A_i , $(i = 1, 2, 3)$ 由例 A.4.1 给出。问题是寻找一个单一的 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ 来验证给定的这 3 个系统的稳定性, 同时使得衰减率 $-\frac{dV(\mathbf{x})}{dt}$ 最大化。这样一个问题等价于如下的优化问题:

$$\begin{aligned}
 & \min \alpha \\
 & \text{s.t. } I < P \\
 & \quad A_1^T P + P A_1 < \alpha P \\
 & \quad A_2^T P + P A_2 < \alpha P \\
 & \quad A_3^T P + P A_3 < \alpha P
 \end{aligned}$$

以下应用求解器 `gevp` 来求解该问题, 为此, 首先确定线性矩阵不等式系统:

```

setlmis([]);
P=lmivar(1,[2 1])

lmiterm([1 1 1 0],1)          % P>I;      I
lmiterm([-1 1 1 P],1,1)       % P>I;      P
lmiterm([2 1 1 P],1,A1,'s')   % LFC #1 (lhs)
lmiterm([-2 1 1 P],1,I)       % LFC #1 (rhs)
lmiterm([3 1 1 P],1,A2,'s')   % LFC #2 (lhs)
lmiterm([-3 1 1 P],1,I)       % LFC #2 (rhs)
lmiterm([4 1 1 P],1,A3,'s')   % LFC #3 (lhs)
lmiterm([-4 1 1 P],1,I)       % LFC #3 (rhs)
lmis=getlmis

```

进而, 通过以下命令来调用 `gevp`:

```
[alpha,popt]=gevp(lmis,3)
```

得到 $\alpha = -0.122$ 是该问题的最优值, 因此相应的最大衰减率是 0.122, 最优解是

$$P = \begin{bmatrix} 5.58 & -8.35 \\ -8.35 & 18.64 \end{bmatrix}$$

如何从决策变量到矩阵变量以及从矩阵变量到决策变量

当线性矩阵不等式由相应的矩阵变量描述时, 线性矩阵不等式求解器涉及的是由这些矩阵变量中的独立元所组成的决策向量 \mathbf{x} 。两个函数 `mat2dec` 和 `dec2mat` 可以实现这两种变量之间的转换。

考虑一个具有三个矩阵变量 X_1 、 X_2 、 X_3 的线性矩阵不等式系统。给定这些变量的特定值 $X1$ 、 $X2$ 、 $X3$, 那么由 `mat2dec` 可以得到相应的决策向量的值:

```
xdec=mat2dec(lmisys,X1,X2,X3)
```

如果 `lmisys` 后分量的个数和线性矩阵不等式系统 `lmisys` 中的矩阵变量个数不符, 则系

统会提示一个出错信息。

这个函数在线性矩阵不等式求解器 mincx 或 gevp 的初始化中也是很有用的。例如, 给定 X_1 、 X_2 、 X_3 的一个初始猜测值, mat2dec 就形成了相应决策向量的初始值 xinit。

反之, 给定决策向量的一个值 xdec, 那么可以通过函数 dec2mat 给出相应的第 k 个矩阵的取值。例如, 以下的表示式可以给出第 2 个矩阵变量的取值:

```
X2=dec2mat(lmisys,xdec,2)
```

函数 dec2mat 中的最后一个分量表明了要求的是第 2 个矩阵变量, 这里也可以用 lmivar 定义的相应矩阵变量的变量名。

矩阵变量和决策变量的总数分别由 matnbr 和 decnbr 给出。另外, 函数 decinfo 提供了决策变量和矩阵变量之间关系的一些详细信息。

A.5 结果验证

LMI 工具箱提供了两个函数用于分析和验证一个线性矩阵不等式优化问题的结果。对一个给定的决策向量的值, 例如由线性矩阵不等式求解器给出的可行或最优解向量, 函数 evallmi 求出线性矩阵不等式系统中所有变量项的值, 进而应用 showlmi 给出特定线性矩阵不等式的左边和右边。

在例 A.4.2 中, 我们可以这样来验证由 mincx 得到的最优解 xopt 是否满足给定的约束条件:

```
evlmi=evallmi(LMIs,xopt)
{lhs,rhs}=showlmi(evlmi,1)
```

第一个命令表示对给定的决策变量值 xopt, 求取系统的值; 第二个命令则显示第 1 个线性矩阵不等式的左边和右边的矩阵值。这个不等式的成立与否可以通过

```
eig(lhs-rhs)
```

来检验, 得到的结果是

```
ans=
-2.0387e-04
-3.9333e-05
-1.8917e-07
-4.6680e+01
```

由此可以看到 lhs-rhs 是负定的, 因此 xopt 满足第 1 个线性矩阵不等式。

A.6 修改一个线性矩阵不等式系统

LMI 工具箱提供了函数 `dellmi`、`delmvar` 和 `setmvar`，它们可以用来修改一个已经确定的线性矩阵不等式系统。以下来说明这些函数的用法。

dellmi

用 `dellmi` 可以从一个线性矩阵不等式系统中删除一个完整的线性矩阵不等式。例如对例 A.2.1 中的线性矩阵不等式系统，假定它由 `lmisys` 描述，现在要删除矩阵变量 X 的正定性约束。这可以通过以下的命令来实现：

```
newsys=dellmi(lmisys,2)
```

其中第 2 个分量表明了要删除的是哪一个线性矩阵不等式。所导出的由两个线性矩阵不等式构成的系统由 `newsys` 表示。

原来系统中的线性矩阵不等式标识符（由位置排列确定的）不因删除了其中的一些不等式后而改变它们在新的线性矩阵不等式系统中的标识符。因此，在例 A.2.1 中删除了第 2 个线性矩阵不等式后，

$$S > I$$

仍然是第 3 个线性矩阵不等式，尽管它在新的系统中已位于第 2 的位置。为了避免引起混淆，更安全的方法是使用由 `newlmi` 给定的线性矩阵不等式名。如在例 A.2.1 中，`BRL`、`Xpos` 和 `Slmi` 依次是 3 个线性矩阵不等式的名称，则 `Slmi` 仍是通过

```
newsys=dellmi(lmisys,Xpos)
```

删除了第 2 个不等式后所得到的新系统中线性矩阵不等式 $S > I$ 的名称。

delmvar

另一种修改一个线性矩阵不等式系统的方式是删除一个矩阵变量，即在所有包含该变量的变量项中删除该矩阵变量。`delmvar` 提供了这样一种修改功能。例如，考虑线性矩阵不等式系统

$$A^T X + X A + B W + W^T B^T + I < 0$$

其中： $X = X^T \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ 和 $W \in \mathbf{R}^{2 \times 4}$ 是这个线性矩阵不等式中的两个矩阵变量。这个线性矩阵不等式可以用以下的命令来描述：

```
setlmis([])
X=lmivar(1,[4 1])    % X
W=lmivar(2,[2 4])    % S
```

```
lmiterm([1 1 1 X],1,A,'s')
lmiterm([1 1 1 W],B,1,'s')
lmiterm([1 1 1 0],1)
```

```
lmisys=getlmis
```

为了删除变量 W ，输入命令

```
newsys=delmvar(lmisys,W)
```

得到的 newsys 描述了 Lyapunov 不等式

$$A^T X + XA + I < 0$$

注意，delmvar 将自动删除所有的只依赖于所删除矩阵变量的不等式。矩阵变量的变量名不会因删除个别的矩阵变量而改变。

删除一个矩阵变量实际上等价于让这个矩阵变量等于零，这一功能也可以由下面的 setmvar 方便地实现。

setmvar

函数 setmvar 用于给某个矩阵变量赋值，一旦赋值，该变量就从原来的问题中消失了，包含该变量的所有项都成为常数项。另外，这个函数在优化问题中也是很有用的，例如可以通过固定某个变量，然后对其他变量进行优化。

考虑例 A.2.1，我们想要知道 G 的最大增益是否小于 1，即 $\|G\|_\infty < 1$ 是否成立。这相当于令尺度矩阵 D （或等价的， $S = D^T D$ ）等于单位矩阵的某个倍数。注意到 $S > I$ ，因此可以选择 $S = 2I$ 。为了让 S 取这样一个值，输入

```
newsys=setmvar(lmisys,S,2)
```

其中的第 2 个分量是相关矩阵变量的变量名 S ，第 3 个分量是应赋给变量 S 的值。这里 2 是 $2I$ 的简捷表示。新系统 newsys 中的线性矩阵不等式是

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA + 2C^T C & XB \\ B^T X & -2I \end{bmatrix} < 0$$

$$X > 0$$

$$2I > I$$

容易看到最后一个不等式不依赖任何变量，而且是成立的，因此可以将它从系统中删除。这可以通过

```
newsys=dellmi(newsys,3)
```

或者

```
newsys =dellmi(newsys,S1mi)
```

来实现。其中 S_{lmi} 是由 `newlmi` 给定的第 3 个线性矩阵不等式的名称。

A.7 一些进一步的功能

结构矩阵变量

在前面介绍的 `lmivar` 使用方法中, 我们知道可以用第 1 和第 2 类型的变量来描述具有对称结构和一般长方结构的矩阵变量。为了描述一些具有更复杂结构的矩阵变量或变量间的相互关系, 则需要利用第 3 种类型的变量以及用决策变量来确定矩阵变量中的独立元。对第三种类型的变量结构, 每一个元被确定为 0 或 $\pm x_n$, 其中 x_n 是第 n 个决策变量。为了描述第三种类型的变量 X , 首先需要确定变量 X 中包含了多少个独立的变元, 这些独立变元构成了包含在变量 X 中的那部分决策变量。如果在定义变量 X 之前已经有 n 个决策变量, 将变量 X 中涉及到的 p 个独立变元表示成 x_{n+1}, \dots, x_{n+p} , 那么可以应用这些 x_{n+1}, \dots, x_{n+p} 来定义变量 X 的结构。为了有助于描述这一类型的矩阵变量, `lmivar` 提供了两个额外的输出, 它的一般表达式是

$$[X, n, sX] = \text{lmivar}(\text{type}, \text{struct})$$

其中, n 表示到目前为止使用的决策变量的总数, sX 表明了变量 X 中的每一个元依赖于决策变量 x_1, \dots, x_n 的哪一个元。

下面举例说明如何应用 `lmivar` 来描述第三类的矩阵变量。首先考虑不相关矩阵变量的情况。

例 A.7.1 考虑具有结构

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$

的矩阵变量 X , 其中 X_1 和 X_2 分别是 2×3 维和 3×2 维的长方矩阵。这样的—个矩阵变量 X 可以描述如下:

1. 定义长方矩阵变量 X_1 和 X_2

```
setlmis([])
[X1,n,sX1]=lmivar(2,[2 3])
[X2,n,sX2]=lmivar(2,[3 2])
```

输出 $sX1$ 和 $sX2$ 给出了包含在变量 X_1 和 X_2 中的决策变量:

```
>>sX1
```

```
sX1=
```

```

1  2  3
4  5  6

```

```
>>sX2
```

```

sX2=
 7  8
 9 10
11 12

```

例如, $sX2(1,1)=7$ 表示 X_2 的第(1,1)处的元是第 7 个决策变量。

2. 利用 Type 3 来定义矩阵变量 X , 并且用 X_1 和 X_2 来定义其结构:

```
[X,n,sX]=lmivar(3,[sX1,zeros(2);zeros(3),sX2])
```

这样得到的变量 X 具有所要的结构。

```
>>sX
```

```

sX=
 1  2  3  0  0
 4  5  6  0  0
 0  0  0  7  8
 0  0  0  9 10
 0  0  0 11 12

```

例 A.7.2 假设问题变量包含一个 3×3 的对称矩阵 X 和一个 3×3 的 Toeplitz 矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_1 & y_2 \\ y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

矩阵变量 Y 只有 3 个独立的变元, 因此涉及 3 个决策变量。由于 Y 和 X 是相互独立的, 因此和 Y 相关的决策变量可以记为 $n+1$ 、 $n+2$ 、 $n+3$, 其中 n 是与 X 相关的决策变量的个数。这个数可以通过定义矩阵变量 X 的命令得到:

```

setlmis([])
[X,n]=lmivar(1,[3 1])

```

其中输出 $[X,n]$ 中的第 2 个分量给出了到目前为止使用的决策变量的总数 (这里 $n=6$)。有了这个数以后, Y 可以定义如下:

```
Y=lmivar(3,n+[1 2 3;2 1 2;3 2 1])
```

或等价的

```
Y=lmivar(3,toeplitz(n+[1 2 3]))
```

其中的 `toeplitz` 是一个标准的 MATLAB 函数。为了验证,也可以使用 `decinfo` 来显示 X 和 Y 中决策变量的分布。

```
lmis=getlmis
decinfo(lmis,X)
```

```
ans=
     1     2     4
     2     3     5
     4     5     6
```

```
decinfo(lmis,Y)
```

```
ans=
     7     8     9
     8     7     8
     9     8     7
```

下面是一个关于相互关联的矩阵变量的例子。

例 A.7.3 考虑具有以下结构的三个矩阵变量 X 、 Y 和 Z ：

$$X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ -t & 0 \end{bmatrix}$$

其中： x 、 y 、 z 、 t 是独立的标量变量。为了描述这样的三个矩阵变量，首先定义两个独立的矩阵变量 X 和 Y （两个都是第 1 种类型的）：

```
setlmis([])
{X,n,sX}=lmivar(1,[1 0;1 0])
{Y,n,sY}=lmivar(1,[1 0;1 0])
```

其中 `lmivar` 输出中的第 3 个分量给出了 X 和 Y 中的每个元对决策变量 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, t)$ 的依赖关系：

```
sX=
     1     0
     0     2

sY=
```


$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

使用 `lmivar` 的类型 3, 可以确定矩阵变量 Z 的结构:

$$[Z, n, sZ] = \text{lmivar}(3, [0 \ -sX(1,1); -sY(2,2) \ 0])$$

由于 $sX(1,1)$ 等于 x_1 , 而 $sY(2,2)$ 等于 x_4 , 因此上面的命令定义了

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & -x_1 \\ -x_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ -t & 0 \end{bmatrix}$$

复线性矩阵不等式

前面讨论的线性矩阵不等式都是针对实矩阵的, 不能直接用来处理包含复矩阵的线性矩阵不等式问题。注意到一个复的埃尔米特矩阵 (Hermitian matrix) $L(x)$ 满足 $L(x) < 0$ 当且仅当

$$\begin{bmatrix} \text{Re}(L(x)) & \text{Im}(L(x)) \\ -\text{Im}(L(x)) & \text{Re}(L(x)) \end{bmatrix} < 0$$

因此, 复线性矩阵不等式可以转换成实线性矩阵不等式来讨论。

以下提出一个将复线性矩阵不等式转换为实线性矩阵不等式的方法:

- 把每一个复矩阵变量 X 分解成

$$X = X_1 + jX_2$$

其中 X_1 和 X_2 是实的。

- 把每一个复系数矩阵 A 分解成

$$A = A_1 + jA_2$$

其中 A_1 和 A_2 是实的。

- 进行所有复矩阵的乘积运算。对每一个线性矩阵不等式的实部和复部, 得到其关于 X_1 、 X_2 的仿射表示式, 进而得到等价的实线性矩阵不等式表示式。

对于没有外因子的线性矩阵不等式, 在不等式中用 $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix}$ 来替代矩阵变量 $X = X_1 + jX_2$, 用 $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix}$ 来替代给定的矩阵 $A = A_1 + jA_2$ 。例如对以下的线性矩阵不等式系统

$$M^H X M < X, \quad X = X^H > I$$

它的等价的实线性矩阵不等式系统表示是

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix} > I$$

其中: $M = M_1 + jM_2$, $X = X_1 + jX_2$, M_1, X_1 是实矩阵。

如果假定 $M \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$, 则以上考虑的复线性矩阵不等式可以描述如下:

```
M1=real(M), M2=imag(M)
bigM=[M1 M2;-M2 M1]
setlmis{[]}

% declare bigX=[X1 X2;-X2 X1] with X1=X1' and X2+X2'=0:

[X1,n1,sX1]=lmivar(1,[5 1])
[X2,n2,sX2]=lmivar(3,skewdec(5,n1))
bigX=lmivar(3,[sX1 sX2;-sX2 sX1])

% describe the real counterpart of the complex LMI system:

lmiterm([1 1 i 0],1)
lmiterm([-1 1 i bigX],1,1)
lmiterm([2 1 1 bigX],bigM',bigM)
lmiterm([-2 1 1 bigX],1,1)

lmis=getlmis
```

结构矩阵变量 $\text{bigX} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ -X_2 & X_1 \end{bmatrix}$ 按以下步骤确定:

1. 将 X_1 确定为实的对称矩阵变量, 保存它的结构描述 sX1 和 X_1 中使用的决策变量个数 $n1$ 。
2. 使用 `skewdec`, 将 X_2 确定为一个斜对称矩阵变量。函数 `skewdec(5,n1)` 确定了依赖于决策变量 $n1+1, n1+2, \dots$ 的 5×5 维斜对称矩阵。
3. 使用第 3 种类型的矩阵变量, 利用 X_1 和 X_2 的结构 sX1 、 sX2 定义 bigX 的结构。

为 `mincx` 确定目标函数 $c^T x$

线性矩阵不等式求解器 `mincx` 是在线性矩阵不等式约束下求线性目标函数 $c^T x$ 的最小值, 其中 x 是由决策变量构成的向量。在多数控制问题中, 这样的目标函数是由线性矩阵不等式系统中的矩阵变量而不是决策变量表示的。例如, $\text{Trace}(X)$, 其中 X 是一个对称矩阵变量; $u^T X u$, 其中 u 是一个给定的向量。

当目标函数是矩阵变量的一个仿射函数时, 函数 `defcx` 可以为 c 的确定提供一个方便的方法。以下通过一个例子来说明这个方法。

考虑线性目标函数

$$\text{Trace}(X) + x_0^T P x_0$$

其中 X 和 P 是两个对称矩阵变量, x_0 是一个给定向量。如果 `lmisys` 是所考虑的线性矩阵不等式系统的内部表示, x_0 、 X 、 P 由以下命令确定:

```
x0=[1 1]
setlmis([])
X=lmivar(1,[3 0])
P=lmivar(1,[2 1])

:

lmisys=getlmis
```

使得 $c^T x = \text{Trace}(X) + x_0^T P x_0$ 的向量 c 可以用以下命令描述:

```
n=decnbr(lmisys)
c=zeros(n,1)

for j=1:n,
    [Xj,Pj]=defcx(lmisys,j,X,P)
    c(j)=trace(Xj)+x0'*Pj*x0
end
```

第 1 个命令给出了问题中的决策变量的个数, 第 2 个命令则确定了向量 c 的维数。循环语句 `for` 完成以下的运算:

1. 取 $x_j = 1$, x 的其他元等于零, 求矩阵变量 X 和 P , 该运算由 `defcx` 完成。`defcx` 的输入除了 `lmisys` 和 j 以外, 还有包含在目标函数中的矩阵变量的变量名 X 和 P , 其输出是 X_j 和 P_j 。

2. 对 $X = X_j$ 和 $P = P_j$, 求相应的目标函数值。根据定义得到 c 的第 j 个元。

在以上考虑的例子中, 相应的结果是:

```
c=
    3
    1
    2
    1
```

其他的目标函数可以通过采用以下的一般框架类似地处理:

```
n=decnbr(LMI system)
```

```

c=zeros(n,1)
for j=1:n,
    [matrix values]=defcx(LMI system,j,
matrix identifiers)
    c(j)=objective(matrix values)
end

```

A.8 系统模型描述

考虑具有以下形式的线性时不变模型

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (\text{A.8.1})$$

其中： A 、 B 、 C 、 D 、 E 是已知的实矩阵，且 E 是可逆的， $x(t)$ 、 $u(t)$ 、 $y(t)$ 分别是系统的状态、输入和输出。模型 (A.8.1) 在描述一些参数依赖的系统模型时是特别有用的。另外，当矩阵 E 的逆是病态时，模型 (A.8.1) 可以避免求矩阵 E 的逆。最后，许多动态系统也可以很自然地写成模型 (A.8.1) 的形式。例如，二阶系统

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + f\dot{x} + kx &= u \\ y &= x \end{aligned}$$

可以写成以下具有形式 (A.8.1) 的模型：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \dot{\xi}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -f \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \xi(t) \end{aligned}$$

其中 $\xi(t) = [x(t) \ \dot{x}(t)]^T$ 。

状态空间模型 (A.8.1) 可以用一个单一的 MATLAB 矩阵 **SYSTEM** 来表示，它具有以下的结构形式：

$$\left[\begin{array}{cc|c} A + j(E - I) & B & n \\ C & D & 0 \\ \hline 0 & & -\text{Inf} \end{array} \right]$$

其中右上角的 n 表示状态的维数。

LMI 工具箱提供了函数 `ltisys` 和 `ltiss`，用以产生矩阵 **SYSTEM** 以及从 **SYSTEM** 得到状态空间模型的系数矩阵。例如，

```
sys=ltisys(-1,1,1,0)
```

给出了描述系统

$$\dot{x} = -x + u, \quad y = x$$

的 SYSTEM 矩阵。为了从 SYSTEM 矩阵 sys 得到状态空间模型的系数矩阵 A, B, C, D ，可以应用以下的命令：

```
[A,B,C,D]=ltiss(sys)
```

对于一个单输入单输出系统，函数 lttf 给出了矩阵 SYSTEM 的传递函数表示。反之，若 $G(s) = n(s)/d(s)$ ，则命令

```
sys=ltisys('tf',n,d)
```

给出了系统 $G(s)$ 的一个状态空间实现。其中 n 和 d 分别是多项式 $n(s)$ 和 $d(s)$ 的向量表示。

$\text{sinfo}(\text{sys})$ 给出了 SYSTEM 矩阵 sys 所表示系统的状态，输入和输出向量的维数。 $\text{spol}(\text{sys})$ 则给出了系统的极点。函数 ssub 给出了由系统的特定输入和输出组成的新系统的 SYSTEM 矩阵。例如系统 G 有两个输入和三个输出，则从系统 G 的第 1 个输入到第 2、第 3 个输出的新系统可以由以下命令得到：

```
ssub(G,1,2:3)
```

其中 G 是系统 G 的 SYSTEM 矩阵表示。函数 sinv 给出系统 $G(s)$ 的逆 $H(s) = G^{-1}(s)$ ，其中假定 $G(s)$ 的状态空间模型表示中的矩阵 D 是可逆的。函数 sbalanc 可用来平衡一个线性时不变系统的状态空间实现，即寻找一个对角尺度相似变换矩阵，以降低矩阵 A, B, C 的范数。

一个复杂的系统可以通过一些更加简单的环节经串联、并联和反馈等得到。LM1 工具箱提供了函数来产生由各个环节的 SYSTEM 矩阵经串联、并联和反馈等得到的系统的 SYSTEM 矩阵。

设 $g1$ 和 $g2$ 分别是系统 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$ 的 SYSTEM 矩阵，则 sadd 给出了 $G_1(s) + G_2(s)$ 的 SYSTEM 矩阵，而 $\text{smult}(g1,g2)$ 给出了传递函数 $G_2(s)G_1(s)$ （注意顺序）的 SYSTEM 矩阵。这两个函数最多可以有 10 个输入分量，其中最多可以有一个是参数依赖的系统。

$\text{sdiag}(g1,g2)$ 给出了传递函数 $G(s) = \text{diag}\{G_1(s), G_2(s)\}$ 的 SYSTEMS 矩阵。

对于如图 A.2 表示的反馈关联系统

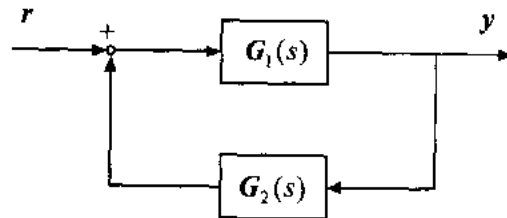


图 A.2 反馈关联系统

函数 sloop 给出了从 r 到 y 的闭环系统的 SYSTEM 矩阵。

函数 slft 则给出了以下更一般的反馈关联系统（如图 A.3 所示）从 $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ 到 $\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ 的闭环

传递函数的 SYSTEM 矩阵表示。

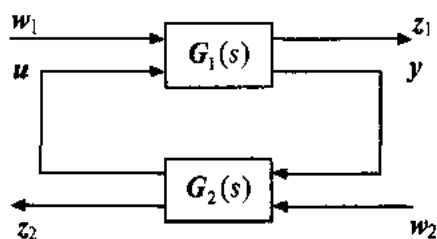


图 A.3 关联系统

若 $u \in \mathbf{R}^2$, $y \in \mathbf{R}^3$, 则描述以上反馈关联系统的命令是

```
slft(g1,g2,2,3)
```

这个函数在 H_∞ 控制中计算线性分式关联时是很有用的。

参 考 文 献

Chang S.S.L. and Peng T.K.C. (1972). Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(4): 474-483

Chilali M., Gahinet P. and Apkarian P. (1999). Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(12): 2257-2270

Chen Guoding, Yu Li, Yang Maying, *et al.* (1999). Decentralized stabilization of large-scale linear systems with time-delay. *Proceedings of the 14th World Congress of IFAC*, vol.L, 279-283

陈国定, 俞立, 杨马英等 (2002). 不确定离散系统的输出反馈保性能控制. *控制与决策*, 17(1): 117-119

陈国定, 俞立, 褚健 (2002). 具有状态和控制滞后不确定系统的保性能控制器设计. *自动化学报*, 28(2): 314-316

褚健, 俞立, 苏宏业 (2000). 鲁棒控制理论及应用. 浙江大学出版社

Dullerud G.E. and Paganini F. (2000). *A Course in Robust Control Theory — A Convex Approach*. Springer-Verlag, New York, Inc.

El Ghaoui L., Oustry F. and AitRami M. (1997). A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(8): 1171-1176

Esfahani S.H. and Petersen I.R. (2000). An LMI approach to output-feedback-guaranteed cost control for uncertain time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10(2): 157-174

Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J. and Chilali M. (1995). *LMI Control Toolbox - for Use with Matlab*, The MATH Works Inc.

Gutman S. and Jury E.I. (1981). A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plane. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 26: 853-863

Haddad W.M., Kapila V. And Adballah C.T. (1997). Stabilization of linear and nonlinear systems with state and measurement delays. *Proceedings of the 4th European Control Conference*, Brussels, Belgium

Hotz A. and Skelton R.E. (1987). Covariance control theory. *International Journal of Control*, 46(1): 13-32

Khargonekar P.P., Petersen I.R. and Zhou K. (1990). Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and H_∞ control theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 35: 356-361.

Kosmidou O I, Abou-Kandil H and Bertrand P. (1991). A game theoretic approach for

guaranteed cost control. Proceedings of 1991 European Control Conference, Grenoble, France, pp. 2220-2225

Jeung E.T., Kim J.H. and Park H.B. (1998). H_∞ output feedback controller design for linear systems with time-varying delayed state. IEEE Trans. on Automatic Control, 43(7): 971-974

Moheimani S.O.R and Petersen I.R. (1995). Quadratic guaranteed cost control with robust pole placement in a disk. IEE Proc.-Control Theory Appl., 143(1): 37-43

Oliveira M.C., Geromel J.C. and Bernussou J. (1999). An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems. Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision & Control, Phoenix, Arizona, 3611-3616

Palhares R.M. and Peres P.L.D. (2001). LMI approach to the mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete-time uncertain systems. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 37(1): 292-296

Palhares R.M. and Peres P.L.D. (1999). Robust H_∞ filtering design with pole placement constraint via LMIs. Journal of Optimization Theory and Applications, 102(2): 239-261

Park PooGyeon (1999). A Delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays. IEEE Trans. on Automatic Control, 44(4): 876-877

Rotea M A (1993). The generalized H_2 control problem. Automatica, 29: 373-385

Skelton R.E., Iwasaki T. and Grigoriadis K.M. (1998). A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design. London: Taylor & Francis

Sobel K.M., Yu W., Piou J.E., *et al.* (1992). Robust eigenstructure assignment with structured state-space uncertainty. International Journal of Systems Science, 23: 765-788

VanAntwerp J.G. and Braatz D. (2000). A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. Journal of Process Control, 10(4): 363-385

俞立 (1991). 不确定线性时滞系统的稳定化控制器设计. 控制理论与应用, 8(1): 68-73

Yu Li, Chu Jian and Su Hongye (1996). Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty. Automatica, 32(12): 1759-1762

Yu Li (1997). Guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. Proceedings of the 2nd Asian Control Conference, Korea, vol.1: 705-708

Yu Li, Wang Jincheng and Chu Jian (1997). Guaranteed cost control of uncertain linear discrete-time systems. Proceedings of 1997 American Control Conference, vol. 5, 3181-3184

俞立, 陈国定 (1997). 一类关联时滞系统的分散稳定化控制器设计. 控制与决策, 12(5): 559-564

俞立, 褚健 (1998). 具有滞后输入的不确定系统的鲁棒镇定. 控制理论与应用, 15(2): 277-280

俞立, 王万良, 褚健 (1998). 不确定时滞系统的输出反馈稳定化控制器设计. 自动化学报, 24(2): 225-229

Yu Li (1999). Robust stability analysis for linear time-delay systems with uncertain

parameters: LMI approach. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 8(1): 22-26

Yu Li and Chu Jian (1999). An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 35(6): 1155-1159

Yu Li (1999). Stability robustness analysis of linear systems with delayed perturbations. *Journal of the Franklin Institute*, 336(5): 755-765

俞立 (1999). 不确定离散线性系统的鲁棒镇定. *控制与决策*, 14(2): 169-172

俞立 (1999). 不确定离散系统的最优保成本控制. *控制理论与应用*, 16(5): 639-642

俞立 (2000). 一类线性离散时滞大系统的分散镇定. *控制理论与应用*, 17(1): 125-127

俞立, 陈国定, 杨马英 (2000). 不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制. *自动化学报*, 26(1): 116-120

Yu Li (2000). Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems: an LMI approach. *Control Theory and Applications*, 17(3): 423-428

Yu Li (2000). Robust control of linear uncertain systems with regional pole and variance constraints. *International Journal of Systems Science*, 31(3): 367-372

Yu Li and Gao Furong (2000). Robust H_∞ control of discrete-time linear systems with delayed state and Frobenius norm-bounded uncertainties. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2754-2755

Yu Li and Gao Furong (2001). Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays. *Journal of the Franklin Institute*, 338(1): 101-110

Yu Li and Gao Furong (2002). Output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems using linear matrix inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(3): 621-634

Yu Li (2002). Decentralized output feedback guaranteed cost control for a class of uncertain interconnected discrete-time systems. *Proceedings of International Control and Automation, Xiamen*

俞立 (2001). 具有闭环极点和方差约束的不确定离散系统鲁棒控制. *控制理论与应用*, 18(4): 621-623

俞立, 陈国定, 潘海天 (2001). 不确定离散时间系统的 H_2/H_∞ 最优保性能控制. *控制与决策*, 16(2): 151-154

俞立 (2001). 线性系统的鲁棒 D 稳定性分析. *自动化学报*, 27(6): 860-862

俞立 (2002). 具有闭环区域极点约束的鲁棒协方差输出反馈控制器设计. *自动化学报*, 28(5)

俞立, 陈国定, 杨马英 (2002). 不确定系统鲁棒输出反馈区域鲁电配置. *控制理论与应用*, 19(2): 244-246

俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究. *自动化学报*

parameters: LMI approach. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 8(1): 22-26

Yu Li and Chu Jian (1999). An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 35(6): 1155-1159

Yu Li (1999). Stability robustness analysis of linear systems with delayed perturbations. *Journal of the Franklin Institute*, 336(5): 755-765

俞立 (1999). 不确定离散线性系统的鲁棒镇定. *控制与决策*, 14(2): 169-172

俞立 (1999). 不确定离散系统的最优保成本控制. *控制理论与应用*, 16(5): 639-642

俞立 (2000). 一类线性离散时滞大系统的分散镇定. *控制理论与应用*, 17(1): 125-127

俞立, 陈国定, 杨马英 (2000). 不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制. *自动化学报*, 26(1): 116-120

Yu Li (2000). Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems: an LMI approach. *Control Theory and Applications*, 17(3): 423-428

Yu Li (2000). Robust control of linear uncertain systems with regional pole and variance constraints. *International Journal of Systems Science*, 31(3): 367-372

Yu Li and Gao Furong (2000). Robust H_∞ control of discrete-time linear systems with delayed state and Frobenius norm-bounded uncertainties. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2754-2755

Yu Li and Gao Furong (2001). Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays. *Journal of the Franklin Institute*, 338(1): 101-110

Yu Li and Gao Furong (2002). Output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems using linear matrix inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(3): 621-634

Yu Li (2002). Decentralized output feedback guaranteed cost control for a class of uncertain interconnected discrete-time systems. *Proceedings of International Control and Automation, Xiamen*

俞立 (2001). 具有闭环极点和方差约束的不确定离散系统鲁棒控制. *控制理论与应用*, 18(4): 621-623

俞立, 陈国定, 潘海天 (2001). 不确定离散时间系统的 H_2/H_∞ 最优保性能控制. *控制与决策*, 16(2): 151-154

俞立 (2001). 线性系统的鲁棒 D 稳定性分析. *自动化学报*, 27(6): 860-862

俞立 (2002). 具有闭环区域极点约束的鲁棒协方差输出反馈控制器设计. *自动化学报*, 28(5)

俞立, 陈国定, 杨马英 (2002). 不确定系统鲁棒输出反馈区域鲁电配置. *控制理论与应用*, 19(2): 244-246

俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究. *自动化学报*

parameters: LMI approach. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 8(1): 22-26

Yu Li and Chu Jian (1999). An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems. *Automatica*, 35(6): 1155-1159

Yu Li (1999). Stability robustness analysis of linear systems with delayed perturbations. *Journal of the Franklin Institute*, 336(5): 755-765

俞立 (1999). 不确定离散线性系统的鲁棒镇定. *控制与决策*, 14(2): 169-172

俞立 (1999). 不确定离散系统的最优保成本控制. *控制理论与应用*, 16(5): 639-642

俞立 (2000). 一类线性离散时滞大系统的分散镇定. *控制理论与应用*, 17(1): 125-127

俞立, 陈国定, 杨马英 (2000). 不确定系统具有圆盘区域极点约束的鲁棒控制. *自动化学报*, 26(1): 116-120

Yu Li (2000). Optimal guaranteed cost control of linear uncertain systems: an LMI approach. *Control Theory and Applications*, 17(3): 423-428

Yu Li (2000). Robust control of linear uncertain systems with regional pole and variance constraints. *International Journal of Systems Science*, 31(3): 367-372

Yu Li and Gao Furong (2000). Robust H_∞ control of discrete-time linear systems with delayed state and Frobenius norm-bounded uncertainties. *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2754-2755

Yu Li and Gao Furong (2001). Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with both state and input delays. *Journal of the Franklin Institute*, 338(1): 101-110

Yu Li and Gao Furong (2002). Output feedback guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems using linear matrix inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(3): 621-634

Yu Li (2002). Decentralized output feedback guaranteed cost control for a class of uncertain interconnected discrete-time systems. *Proceedings of International Control and Automation, Xiamen*

俞立 (2001). 具有闭环极点和方差约束的不确定离散系统鲁棒控制. *控制理论与应用*, 18(4): 621-623

俞立, 陈国定, 潘海天 (2001). 不确定离散时间系统的 H_2/H_∞ 最优保性能控制. *控制与决策*, 16(2): 151-154

俞立 (2001). 线性系统的鲁棒 D 稳定性分析. *自动化学报*, 27(6): 860-862

俞立 (2002). 具有闭环区域极点约束的鲁棒协方差输出反馈控制器设计. *自动化学报*, 28(5)

俞立, 陈国定, 杨马英 (2002). 不确定系统鲁棒输出反馈区域鲁电配置. *控制理论与应用*, 19(2): 244-246

俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究. *自动化学报*